

可下载教学资料

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



高等学校教材
电子信息

数字信号处理 ——原理与算法实现

刘明 徐洪波 宁国勤 编著

清华大学出版社



- * 注重基本概念、基本理论和基本分析方法的阐述
- * 配有习题和大量实例，方便教师教学
- * 所有Matlab程序都可以直接在Matlab软件平台上实现仿真
- * 适合学生循序渐进地学习

ISBN 7-302-13204-6



9 787302 132042 >

定价：23.50元

高等学校教材
电子信息

数字信号处理 ——原理与算法实现

刘明 徐洪波 宁国勤 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论与概念、基本分析方法及算法的软件实现。全书共9章,第1章介绍离散时间信号与系统的基本概念;第2、第3章分别介绍离散时间信号及系统的变换域分析,即Z变换和傅里叶变换;第4、第5章讨论离散傅里叶变换和快速傅里叶变换;第6~第8章讨论数字滤波器的结构、理论及计算机辅助设计方法;第9章阐述数字信号处理实现中的有限字长效应。

本书在阐述数字信号处理基础理论的同时,介绍了各章的知识背景、主要内容和学习要求。各章节内容循序渐进,形式简洁,概念准确,并给出典型例题以强化知识点的学习;各章节还提供相应的Matlab程序,编程用的语句和程序结构由浅入深,并详尽解释新出现的语句和函数,不需要专门学习Matlab语言就能理解。读者利用给出的Matlab程序可以得到数据和图表,形象直观地认识所讨论的算法设计问题。本书各章节衔接紧密,条理清楚,系统性强,各章配有习题,便于所学知识的巩固与自学。

本书适合作为理工科通信、电子、计算机等相关专业的大学本科、专科生和研究生教材,也可作为从事相关领域的科技工作者学习掌握数字信号处理理论的参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理:原理与算法实现/刘明,徐洪波,宁国勤编著. —北京:清华大学出版社,2006.8

(高等学校教材·电子信息)

ISBN 7-302-13204-6

I. 数… II. ①刘… ②徐… ③宁… III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064836号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

组稿编辑:魏江江

文稿编辑:徐跃进

印 刷 者:北京密文胶印厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:17.5 字数:433千字

版 次:2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-13204-6/TN·333

印 数:1~4000

定 价:23.50元

编审委员会成员

- | | |
|-----|---------------|
| 王志功 | (东南大学 教授) |
| 王新龙 | (南京大学 教授) |
| 王成华 | (南京航空航天大学 教授) |
| 邓元庆 | (解放军理工大学 教授) |
| 刘景夏 | (解放军理工大学 副教授) |
| 方 勇 | (上海大学 教授) |
| 朱 杰 | (上海交通大学 教授) |
| 何 晨 | (上海交通大学 教授) |
| 严国萍 | (华中科技大学 教授) |
| 刘复华 | (武汉理工大学 教授) |
| 李中年 | (武汉理工大学 教授) |
| 王成山 | (天津大学 教授) |
| 郭维廉 | (天津大学 教授) |
| 王煦法 | (中国科学技术大学 教授) |
| 郭从良 | (中国科学技术大学 教授) |
| 徐佩霞 | (中国科学技术大学 教授) |
| 赵鹤鸣 | (苏州大学 教授) |
| 刘志军 | (山东大学 教授) |
| 郑永果 | (山东科技大学 教授) |
| 朱守正 | (东北师范大学 教授) |
| 张秉权 | (沈阳工业学院 教授) |
| 张丽英 | (长春大学 教授) |
| 林 君 | (吉林大学 教授) |
| 何怡刚 | (湖南大学 教授) |
| 曾喆昭 | (长沙理工大学 教授) |
| 冯久超 | (华南理工大学 教授) |
| 冯全源 | (西南交通大学 教授) |
| 金炜东 | (西南交通大学 教授) |
| 余成波 | (重庆工学院 教授) |
| 曾凡鑫 | (重庆通信学院 教授) |

曾孝平	(重庆大学 教授)
谢显中	(重庆邮电学院 教授)
张德民	(重庆邮电学院 教授)
彭启琮	(西安电子科技大学 教授)
樊昌信	(西安电子科技大学 教授)
何明一	(西北工业大学 教授)
迟 岩	(集美大学 教授)
刘惟一	(云南大学 教授)
方建安	(东华大学 教授)

改改革开放以来,特别是党的十五大以来,我国教育事业取得了举世瞩目的辉煌成就,高等教育实现了历史性的跨越,已由精英教育阶段进入国际公认的大众化教育阶段。在质量不断提高的基础上,高等教育规模取得如此快速的发展,创造了世界教育发展史上的奇迹。当前,教育工作既面临着千载难逢的良好机遇,同时也面临着前所未有的严峻挑战。社会不断增长的高等教育需求同教育供给特别是优质教育供给不足的矛盾,是现阶段教育发展面临的基本矛盾。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2001年8月,教育部下发了《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》,提出了十二条加强本科教学工作提高教学质量的措施和意见。2003年6月和2004年2月,教育部分别下发了《关于启动高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作的通知》和《教育部实施精品课程建设提高高校教学质量和人才培养质量》文件,指出“高等学校教学质量和教学改革工程”是教育部正在制订的《2003—2007年教育振兴行动计划》的重要组成部分,精品课程建设是“质量工程”的重要内容之一。教育部计划用五年时间(2003—2007年)建设1500门国家级精品课程,利用现代化的教育信息技术手段将精品课程的相关内容上网并免费开放,以实现优质教学资源共享,提高高等学校教学质量和人才培养质量。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上;精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合新世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻

性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。首批推出的特色精品教材包括:

(1) 高等学校教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。

(2) 高等学校教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。

(3) 高等学校教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。

(4) 高等学校教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。

(5) 高等学校教材·信息管理与信息系统。

(6) 高等学校教材·财经管理与计算机应用。

清华大学出版社经过二十年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

E-mail: dingl@tup. tsinghua. edu. cn

前言

高等学校教材·电子信息

数字信号处理是高等院校信息和通信工程类各专业的一门非常重要的专业基础课,在当今高科技领域有着极为重要的地位和广泛的用途。然而由于数字信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的交叉和前沿性学科,有很多的算法、理论本身具有很强的抽象性。而且,由于运算量很大,数字信号处理的算法适合在高速数字集成电路或计算机上实现,对于读者来说则很难直接动手验证以得到形象化的结果。因此,在实际教学过程中,数字信号处理的基础课程一直处于教与学均两难的境地。

本书作者多年从事自动控制、图像处理以及通信工程等与数字信号处理密切相关的教学和科研工作,对教师如何讲授,读者如何学数字信号处理的基本理论、基本概念和基本算法等方面都有切身的体会。针对数字信号处理基础课教学中存在的问题,考虑到读者对数字信号处理理论与算法理解困难,作者在全书内容的取舍、章节的编排、问题的描述、例题的选用、算法的实现以及部分章节的文字编辑等方面都精心考虑并付诸于编写过程中。

本书力求将数字信号处理的基础知识系统地讲解清楚,各章节衔接紧密,每章第一节都设有引言,专门阐述本章的知识背景、主要内容和学习要求。各章节内容循序渐近,安排合理,例题典型,配有习题,方便讲授和自学。每章对重要的算法皆给出必要的案例实现程序,对第1~第3章中新出现的 Matlab 语句和函数都进行详尽解释,编程用的语句和程序结构由浅入深,读者不需要专门学习 Matlab 语言就能理解。所有 Matlab 程序都通过测试,可以直接利用案例程序在 Matlab 软件平台上实现仿真,得到的数据和图表形象直观,使读者容易入手且容易接受算法设计方法,从而增强学习兴趣与信心。

本书的主要内容分成三部分,第一部分包括第1~第5章,是数字信号处理的基础理论内容。第1章讲述离散时间信号与系统的描述方法、线性常系数差分方程以及连续时间信号的数字处理方法;第2~第4章分别讨论3种重要的数学变换工具,即Z变换、序列的傅里叶变换和离散傅里叶变换,以及用它们对离散时间信号与系统进行变换域分析的方法;第5章介绍快速傅里叶变换,它是一种重要的快速实现离散傅里叶变换的算法。第二部分包括第6~第8章,主要介绍数字滤波器的结构、理论及计算机辅助设计方法,包括IIR数字滤波器、FIR数字滤波器,并对比模拟滤波器的设计方法讨论IIR数字滤波器的设计与优化。第三部分(第9章)是数字信号处理的实现内容,讨

论了数字信号处理实现中的量化误差。为了方便读者熟悉 Matlab 程序,本书附录 A 简要地介绍了 Matlab 的使用;附录 B 也给出数字信号处理中常用的 Matlab 函数。

本书的多媒体教学课件将于本书正式出版后制作,届时连同 Matlab 源程序等教学资源一起提供给使用本教材的教学单位或个人。读者可以与出版社或作者本人直接联系。

本书第 6、第 7、第 8 章主要由徐洪波编写,第 4、第 5、第 9 章主要由宁国勤编写,绪论、第 1~第 9 章的部分内容、附录以及全书的统稿工作由刘明完成。李玲远和王敬华老师为本书提出了许多宝贵意见,在此表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限和时间仓促,书中难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

作 者

2006 年 8 月于桂子山

目 录

高等学校教材·电子信息

绪论	1
0.1 数字信号处理系统的组成	1
0.2 数字信号处理的特点	2
0.3 数字信号处理学科的内容	3
0.4 数字信号处理的实现	4
0.5 数字信号处理系统的应用领域	5
第1章 离散时间信号与系统	6
1.1 引言	6
1.2 离散时间信号——序列	7
1.2.1 序列的定义及表示	7
1.2.2 序列的基本运算	7
1.2.3 几种常用序列	11
1.2.4 序列的周期性	14
1.2.5 用单位脉冲序列表示任意序列	14
1.3 离散时间系统	15
1.3.1 离散时间系统的定义及表示	15
1.3.2 线性时不变系统	15
1.3.3 单位脉冲响应与卷积和	17
1.3.4 线性时不变系统的性质	17
1.3.5 因果系统和稳定系统	18
1.4 线性常系数差分方程	21
1.4.1 离散时间系统的数学模型——差分方程	21
1.4.2 线性常系数差分方程求解	22
1.5 连续时间信号的取样	25
1.5.1 理想取样	26
1.5.2 信号恢复	27

1.6 Matlab 实现	29
1.6.1 常用序列的 Matlab 实现	29
1.6.2 序列运算的 Matlab 实现	33
1.6.3 Matlab 求解离散系统的差分方程	34
习题	35
第2章 序列的Z变换与傅里叶变换	38
2.1 引言	38
2.2 序列的Z变换	38
2.2.1 Z变换及其收敛域的定义	38
2.2.2 几种序列的Z变换及其收敛域	39
2.2.3 逆Z变换	43
2.2.4 Z变换的性质和定理	50
2.2.5 利用Z变换求解差分方程	55
2.3 序列的傅里叶变换	57
2.3.1 序列傅里叶变换的定义	57
2.3.2 序列傅里叶变换的性质	59
2.3.3 周期序列的傅里叶级数表示	63
2.3.4 周期序列的傅里叶变换表示	65
2.4 序列的Z变换与连续时间信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	66
2.5 Matlab 实现	69
2.5.1 序列逆Z变换的 Matlab 实现	69
2.5.2 周期序列傅里叶级数的 Matlab 实现	70
习题	71
第3章 离散时间系统的变换域分析	75
3.1 引言	75
3.2 系统函数	75
3.2.1 系统函数的定义	75
3.2.2 系统的零极点对系统特性的影响	77
3.2.3 系统的因果性和稳定性	79
3.3 线性时不变系统的频率响应	80
3.3.1 频率响应的定义	81
3.3.2 频率响应的几何确定法	82
3.3.3 全通系统	85
3.3.4 最小相位系统	87
3.4 无限脉冲响应系统和有限脉冲响应系统	88

3.5 Matlab 实现	90
3.5.1 系统函数的 Matlab 计算	90
3.5.2 利用系统函数求解系统输出的 Matlab 实现	91
3.5.3 利用 Matlab 计算系统频率响应	93
习题	94
第 4 章 离散傅里叶变换	97
4.1 引言	97
4.2 离散傅里叶变换的定义	98
4.2.1 离散傅里叶变换的定义	98
4.2.2 DFT 和 Z 变换、序列的傅里叶变换的关系	100
4.2.3 DFT 的隐含周期性	101
4.3 离散傅里叶变换的基本性质	102
4.3.1 线性性质	102
4.3.2 循环移位性质	102
4.3.3 循环卷积定理	104
4.3.4 复共轭序列的 DFT	105
4.3.5 DFT 的共轭对称性	106
4.4 频域取样	108
4.4.1 频域取样	108
4.4.2 $X(z)$ 的内插公式	110
4.5 离散傅里叶变换的应用	111
4.5.1 用 DFT 计算线性卷积	111
4.5.2 用 DFT 对连续信号进行谱分析	114
4.5.3 用 DFT 对序列进行谱分析	117
4.6 Matlab 实现	120
4.6.1 DFT 物理意义的 Matlab 实现	120
4.6.2 用 DFT 计算线性卷积的 Matlab 实现	122
4.6.3 频域取样定理的 Matlab 实现	123
4.6.4 高密度谱与高分辨率谱差异的 Matlab 实现	124
习题	126
第 5 章 快速傅里叶变换	129
5.1 引言	129
5.2 直接计算 DFT 的问题及改进的途径	129
5.2.1 DFT 的运算量	129
5.2.2 减少运算工作量的途径	130

5.3 按时间抽取的基-2FFT 算法(库利-图基算法)	131
5.3.1 算法原理	131
5.3.2 按时间抽取基-2FFT 算法与直接计算 DFT 运算量的比较	135
5.3.3 按时间抽取的 FFT 算法的特点	136
5.3.4 按时间抽取的 FFT 算法的其他形式流程图	138
5.4 按频率抽取的基-2FFT 算法(桑德-图基算法)	140
5.4.1 算法原理	141
5.4.2 频率抽取法与时间抽取法的异同	143
5.5 快速傅里叶逆变换(IFFT)算法	144
5.6 N 为复合数的 FFT 算法	145
5.7 线性调频 Z 变换算法	147
5.7.1 CZT 算法原理	147
5.7.2 CZT 变换的实现步骤	149
5.7.3 运算量的估算	150
5.8 Matlab 实现	151
5.8.1 用 FFT 进行谱分析的 Matlab 实现	152
5.8.2 用 CZT 进行谱分析的 Matlab 实现	154
习题	155
第 6 章 数字滤波器的基本结构	157
6.1 引言	157
6.2 数字滤波器的基本概念	157
6.2.1 数字滤波器的描述	157
6.2.2 数字滤波器的分类	158
6.3 无限脉冲响应滤波器的结构	160
6.3.1 直接型	160
6.3.2 正准型	160
6.3.3 级联型	161
6.3.4 并联型	162
6.4 有限脉冲响应滤波器的结构	163
6.4.1 直接型	163
6.4.2 级联型	163
6.4.3 线性相位结构	164
6.4.4 频率取样型结构	168
习题	171
第 7 章 无限脉冲响应数字滤波器的设计	173
7.1 引言	173

7.2	数字滤波器的技术指标与设计方法	173
7.2.1	数字滤波器的技术要求	173
7.2.2	数字滤波器的设计方法	174
7.3	用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器	175
7.3.1	模拟滤波器的设计	175
7.3.2	脉冲响应不变法	181
7.3.3	双线性变换法	183
7.3.4	设计 IIR 数字滤波器的频率变换法	185
7.4	IIR 数字滤波器的优化设计	188
7.4.1	频率最小均方误差设计	188
7.4.2	IIR 数字滤波器的时域直接设计	191
7.5	IIR 数字滤波器的 Matlab 仿真实现	193
7.5.1	IIR 数字滤波器设计	193
7.5.2	模拟滤波器到数字滤波器的转换	194
习题	195
第 8 章	有限脉冲响应数字滤波器的设计	197
8.1	引言	197
8.2	利用窗函数法设计 FIR 滤波器	197
8.3	利用频率取样法设计 FIR 滤波器	205
8.4	FIR 数字滤波器的优化设计	207
8.5	IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	212
8.6	FIR 数字滤波器的 Matlab 仿真实现	213
8.6.1	窗函数法设计 FIR 滤波器	213
8.6.2	FIR 滤波器的优化设计	214
习题	215
第 9 章	数字信号处理中的有限字长效应	217
9.1	引言	217
9.2	数的表示及其运算对量化的影响	217
9.2.1	定点运算和浮点运算	217
9.2.2	负数的原码、补码、反码表示	219
9.2.3	截尾效应和舍入效应	221
9.3	输入信号的量化误差	226
9.3.1	A/D 转换器的量化效应	226
9.3.2	量化误差的统计分析	227
9.3.3	量化误差(白噪声)通过线性系统	230

9.4 数字滤波器的系数量化误差	231
9.4.1 系数量化误差对滤波器稳定性的影响	231
9.4.2 系数量化误差对系统零点和极点位置的影响	233
9.4.3 滤波器频率特性误差的估计	235
9.5 数字滤波器运算中的有限字长效应	236
9.5.1 IIR 滤波器定点运算舍入误差的统计分析	236
9.5.2 IIR 滤波器定点运算的动态范围	240
9.5.3 IIR 滤波器定点运算的零输入极限环振荡和溢出振荡	241
习题	247
附录 A Matlab 的使用	250
附录 B 数字信号处理中常用的 Matlab 函数	257
参考文献	261

数字信号处理(digital signal processing, DSP)是从 20 世纪 60 年代以来,随着信息科学和计算机科学的发展而迅速发展起来的一门新技术和新兴学科。它以众多学科为基础,不仅具有完整的学科领域和理论体系,其研究成果以各种形式影响和渗透到其他学科,同时随着科学技术的发展,其重要性日益在各个领域的应用中表现出来。

数字信号处理是把信号变换成数字或符号表示的序列,通过计算机或专用信号处理设备,用数值计算方法对信号进行滤波、变换、压缩、增强、估计及识别等处理,从而得到更符合人们要求的信号形式,以获取有用信息便于在实践中应用。

0.1 数字信号处理系统的组成

信号是信息的物理表现形式,而信息则是信号的具体内容。信号作为信息的载体,几乎涉及所有的工程技术领域。信号包括声、光、电、磁、热、力、速度及质量等方面,而且这些信号常常混合在一起,因此,需要针对信号进行检测、估计或识别等处理,以获取“感兴趣”的信息。

通过各种各样的传感器,用直接或间接的方法可以获得客观世界各种物理量的电信号,然后再进行各种必要的处理,进而获取需要的信息。采用电信号表达物理量,是因为对电信号表达的信号进行转换、传送以及后续处理都比其他方式方便得多。但绝大多数传感器获取的是模拟信号,这些信号在时间域和数值域都是连续的,不能直接进行数字处理,而进行数字处理的计算机只能接收数字信号,这就要求在对某一信号进行数字处理之前,先要将模拟信号转换为数字信号。有了数字信号,就可以运用数值运算的方便和灵活性,对信号以人们所期望的某种方式进行处理。

为了了解数字信号处理的基本组成,下面讨论模拟信号的数字化处理过程,数字信号处理系统可用图 0.1 所示的原理方框图表示。

由图 0.1 可见,系统首先把模拟信号变换成数字信号,然后用数字技术进行处理,最后

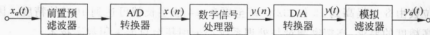


图 0.1 模拟信号数字化处理的原理方框图

再还原成模拟信号。模拟信号 $x_a(t)$ 通过前置预滤波器滤除高频成分(大于取样频率的一半)。

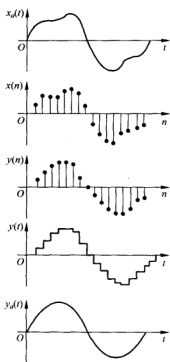


图 0.2 模拟信号数字化处理波形图

随后在模数(A/D)转换器的取样器中每隔时间 T 秒(取样周期)取出一次当前输入信号的幅度,取样后得到的离散时间信号只表示离散时间点 $(0, T, 2T, \dots, nT)$ 上的信号。在模数转换器的量化器中按照量化电平,将取样信号转换成二进制数。可见,模拟信号经模数转换后在时间域和数值域都是离散的,这种信号就是数字信号 $x(n)$ 。数字序列通过数字信号处理器进行处理,得到输出数字信号 $y(n)$ 。 $y(n)$ 通过数模(D/A)转换器变换成模拟信号 $y(t)$,最后还要通过一个模拟滤波器,滤除不必要的高频成分,平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$ 。这些信号在处理过程中的波形如图 0.2 所示。

实际的系统并不一定要包括图 0.1 中所示的所有过程。如果系统只需要数字输出,则可直接以数字形式显示或打印,就不需要数模转换器和输出滤波器。另外,一些系统的输入就是数字量,因而也不需要数模转换器。如果系统的输入与输出都是数字量,这种纯数字系统只需要数字信号处理器这一核心部分即可。

0.2 数字信号处理的特点

由于数字信号处理的对象是数字信号,信号处理的方式是数值运算,因而数字信号处理与模拟信号处理相比较,具有很多优点。

1. 灵活性强

一个系统的性能主要取决于系统的某些参数,这些参数预先存放在存储器中。数字系统很容易改变这些存储的参数,这样就可以很方便地改变系统的性能,甚至得到完全不同的系统。数字系统的改变可以通过在线完成,从而实现一个系统多种用途。相比之下,改变模拟系统的参数要困难得多。

2. 精度高

模拟系统的精度由元器件决定,模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上。目前数字系统的运算位数由 8 位提高到 16 位、32 位甚至更高,14 位字长就可达到 10^{-4} 的精度。因此,为了满足高精度的要求,高精度测量与处理系统都采用甚至只能采用数字技术。

3. 可靠性高

模拟系统的元器件都有一定的温度系数,而且电信号是连续变化的,容易受周围环境中温度及噪声等的影响。数字系统只有0和1两个信号电平,受周围环境、温度及噪声的影响较小。目前数字系统采用大规模集成电路,可靠性更高。

4. 便于大规模集成

模拟系统采用电感器、电容器等模拟元器件,其选用非常困难,性能也难以达到要求。数字系统采用的数字器件本身具有高度规范性,便于大规模集成和生产,产品成品率高,从而降低了系统成本。例如,利用数字系统实现高性能滤波器很容易。

5. 可获得高性能指标

例如,有限长脉冲响应数字滤波器可实现准确的线性相位特性,而模拟系统很难达到。再如,对信号进行频谱分析时,模拟频谱仪在频率低端只能分析到10Hz以上的频率,且难以做到高分辨率,但在数字谱分析中,已能做到 10^{-3} Hz的谱分析。

数字信号处理技术也有一些局限性。例如,数字信号处理的速度不太高,系统结构比较复杂,数字器件和超大规模集成的成本较高。随着电子与信息技术、通信技术、计算机及微电子技术的迅速发展,数字信号处理的理论不断丰富和发展,各种新算法不断涌现,数字信号处理技术的局限性也不断减少,而数字信号处理所具有的优点使得其技术和算法受到极大的关注。

0.3 数字信号处理学科的内容

数字信号处理学科的内容非常丰富,主要是因为它有着广泛的应用领域。不同的应用领域对数字信号处理学科提出了各种不同的要求,即使同一领域的不同问题,所使用的数字信号处理方法也可能是不同的。这些要求推动了数字信号处理理论和技术的发展,丰富了数字信号处理学科的研究内容。反过来,数字信号处理学科的研究成果又不断地促进各应用领域科学和技术的进步。

数字信号处理学科的迅速发展是从20世纪60年代开始的,其主要标志是快速傅里叶变换算法的提出和数字滤波器设计方法的完善。数字信号处理尽管是一门新兴学科,但经过半个世纪的发展,被研究的对象已不再局限于较简单的线性、因果、最小相位系统,非线性、非因果、非最小相位系统逐渐成为研究热点。同时由于数学工具——高阶统计量和小波变换的发展,现已能分别对非高斯信号和非平稳(即时变)信号进行有效地分析处理。

数字信号处理学科有着深厚而坚实的理论基础,主要包括离散信号理论、离散系统理论、各种快速算法、数字滤波器设计算法及实现技术、信号的估计与检测以及信号采集理论等。此外,数字信号处理理论还包括信号压缩、信号建模、信号处理的现代算法以及信号处

理的实现问题等。

数字信号处理就是应用数值计算理论对数字信号进行处理,实现的物理基础是计算机或通用(专用)信号处理设备。因此,数字信号处理的理论和技术在各应用领域中的应用,得益于超大规模集成电路技术、计算机技术和软件工程技术的发展,以及与各应用领域本身的理论和技术紧密结合并互相渗透。这样,就不断地开辟出新的数字信号处理领域,例如通信信号、雷达信号、声呐信号、地震信号、气象信号的处理以及数字图像处理等新领域。显而易见,数字信号处理学科领域包括众多的研究内容,可以将它们划分为不同的学科分支,其中数字频谱分析和数字滤波是数字信号处理的两个基本分支。

数字频谱分析包括对确定信号的频谱分析和随机信号的频谱分析。对于确定信号的频谱,可以采用离散傅里叶变换(DFT)进行分析,或者采用线性调频Z变换进行分析;对于随机信号的频谱分析可采用统计的分析方法。

数字滤波分为有限长脉冲响应(FIR)滤波器和无限长脉冲响应(IIR)滤波器两部分,包括滤波器的结构、优化以及实现等问题。数字滤波器的实现问题又可分为软件实现、硬件实现和软硬件结合实现三种。

按被处理信号的不同,可将数字信号处理分为一维信号处理和高维信号处理,单声道语音信号是典型的一维信号,而图像信号是典型的二维信号。本书的研究对象是一维信号,其结论可以推广到二维以及二维以上高维数字信号的处理。一维以上数字信号的处理,以及随机信号的处理不在本书研究内容之内。

0.4 数字信号处理的实现

数字信号处理应包括数字信号处理的理论、分析方法、算法与数字信号处理的实现,即数字信号处理的软件及硬件实现方法。

1. 在通用微型计算机上用软件实现

可以自己编写软件,也可以使用国内外研究机构、公司推出的数字信号处理软件包,例如MathWorks公司的Matlab软件。这种实现方法速度较慢,但容易实现,多用于教学与科研。

2. 用单片机实现

包括单片机在内的嵌入式控制器发展速度很快,功能也很强大。利用单片机的硬件环境编写所需要的信号处理软件,可直接应用于工程实际,如数控机床、医疗仪器等。

3. 用专用数字信号处理器(DSP)芯片实现

与单片机相比,DSP芯片有着更为突出的优点,如内部带有乘法器、累加器,采用流水线工作方式及并行处理结构,多总线,速度快,配有信号处理的指令。DSP芯片的问世及飞速发展,为信号处理技术应用于工程实际提供了广阔的空间。目前市场上DSP芯片供应商主要有德州仪器、杰尔系统、摩托罗拉和模拟器件等公司。

0.5 数字信号处理系统的应用领域

人们在信息时代享用科学技术为生活带来便利的同时,很容易想到计算机在其中发挥的巨大作用,但数字信号处理技术在其中发挥的作用超乎一般人的想象。可以说,没有数字信号处理技术,现代社会的技术发展和给生活带来的便利将大打折扣,甚至无法实现。

数字信号处理系统一经问世,便吸引了很多学科的众多学者并把它应用于自己的研究领域,如在语音、图像、通信、雷达、声呐、生物医学、地球物理、地质勘探、遥感遥测、航空航天、电力系统等众多领域获得广泛应用,也有效地推动了众多工程技术领域的技术进步和学科发展。在参考文献[2]中列举了部分数字信号处理成功应用的领域,读者可以参考。

综上所述,数字信号处理是一门涉及众多学科,又应用于众多领域的新技术和新兴学科。它既有完整的理论体系,又有广泛的应用领域。

第1章

离散时间信号与系统

1.1 引言

人们相互问候、发布新闻、气象云图、广播图像或传递数据,都要把某些信息作为一定形式的信号传送出去。可以说,信号是信息的表现形式,信息则是信号的具体内容。例如,交通信号灯传递的信息是红灯停而绿灯行。信号是传递信息的函数。

一个信号可以定义为一个函数。按信号的特点不同,在数学上信号可表示成一个或多个独立变量的函数。例如,语音信号可以表示为一个时间变量的函数,静止图像信号表示为两个空间变量的亮度函数。

一维变量可以是时间,也可以是其他参量,习惯上将时间作为信号的自变量。在信号的数学表示式中,信号的幅度和时间可以是连续的,也可以是离散的。连续时间信号是定义在连续时间域内的信号,其幅度可以是连续数值,也可以是离散数值。离散时间信号是定义在离散时间点上的信号,其幅度同样可以是连续数值,也可以是离散数值。

模拟信号和数字信号是信号的特殊形式。模拟信号是时间和幅值都是连续数值的信号,但在实际中连续时间信号与模拟信号常常通用,用以说明同一类信号。数字信号是时间和幅值都离散化的信号。

系统的作用是将信号变换成某种更符合要求的形式。根据系统输入输出信号的不同,把输入和输出信号都是连续时间信号的系统称为连续时间系统;把输入和输出信号都是离散时间信号的系统称为离散时间系统;把输入和输出信号都是模拟信号的系统称为模拟系统;把输入和输出信号都是数字信号的系统称为数字系统。当然也有模拟系统和数字系统构成的混合系统。

在模拟系统中,对信号与系统的描述与分析有微分方程、傅里叶变换及拉普拉斯变换。数字信号处理研究时域离散信号和系统的变换和处理,相应地有差分方程、序列傅里叶变换及 Z 变换。本章主要介绍离散时间信号的基本概念、离散时间系统的定义及其性质、线性常系数差分方程及其求解方法,以及理想取样、连续时间信号数字处理的概念和基本方法。

1.2 离散时间信号——序列

1.2.1 序列的定义及表示

在离散时间系统中,信号一般只在均匀间隔的离散时间 nT 上给出函数值,因此,要表示成离散时间的数字序列。由于在实际信号处理过程中,信号要按顺序存放在存储器或寄存器里供随时取用, nT 更多地表示信号在序列中前后位置的顺序,因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值。这样,离散时间信号可表示为

$$x = \{x(n)\}, \quad -\infty < n < +\infty \quad (1.1)$$

$x(n)$ 表示序列的第 n 个离散时间点的取值,为了方便常常直接用 $x(n)$ 表示离散时间信号——序列。离散时间信号也可以用图形来描述,如图 1.1 所示。图中纵向线段的长短表示各序列值的大小。虽然横轴为连续直线,但 $x(n)$ 只在 n 为整数时才有一定的数值, n 为非整数时没有定义(不能认为此时 $x(n)$ 的值是零)。

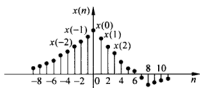


图 1.1 离散时间信号的图形表示

1.2.2 序列的基本运算

在数字信号处理中,需要对序列进行运算。序列的运算包括和、积、移位、标乘、翻转、累加、差分、时间尺度变换以及卷积和等。

1. 和

设序列为 $x(n)$ 和 $y(n)$, 则序列

$$z(n) = x(n) + y(n) \quad (1.2)$$

表示两个序列的和,定义为同序号的序列值逐项对应相加。

2. 积

设序列为 $x(n)$ 和 $y(n)$, 则序列

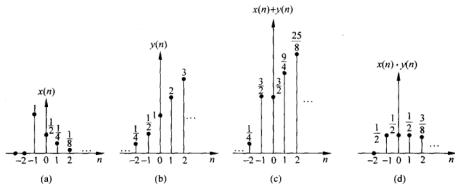
$$z(n) = x(n) \cdot y(n) \quad (1.3)$$

表示两个序列的积,定义为同序号的序列值逐项对应相乘。

例 1.1 设 $x(n) = \begin{cases} 2^{-n-1} & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases}$ 和 $y(n) = \begin{cases} 2^n & n < 0 \\ n+1 & n \geq 0 \end{cases}$, 计算序列的和 $x(n) + y(n)$

与积 $x(n) \cdot y(n)$ 。

解 $x(n)$ 、 $y(n)$ 、 $x(n) + y(n)$ 和 $x(n) \cdot y(n)$ 如图 1.2 所示。

图 1.2 序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的和与积

$$x(n) + y(n) = \begin{cases} 2^n & n < -1 \\ \frac{3}{2} & n = -1 \\ 2^{-n-1} + n + 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$x(n) \cdot y(n) = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ \frac{1}{2} & n = -1 \\ (n+1)2^{-n-1} & n \geq 0 \end{cases}$$

3. 移位

设序列为 $x(n)$, 则序列

$$y(n) = x(n-m) \quad (1.4)$$

表示将序列 $x(n)$ 进行移位。当 m 为正时, 则 $x(n-m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时 (右移) m 位而得到的一个新序列 $y(n)$; 而 $x(n+m)$ 则指依次超前 (左移) m 位。当 m 为负时, 则相反。

4. 标乘

设序列为 $x(n)$, a 为常数 ($a \neq 0$), 则序列

$$y(n) = ax(n) \quad (1.5)$$

表示序列 $x(n)$ 的标乘, 定义为各序列值均乘以 a , 使新序列的幅度为原序列的 a 倍。

5. 翻转

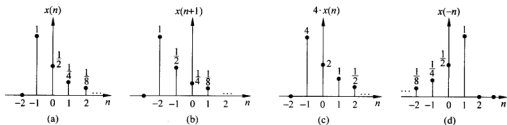
设序列为 $x(n)$, 则序列

$$y(n) = x(-n) \quad (1.6)$$

表示以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻转。

例 1.2 设序列 $x(n) = \begin{cases} 2^{-n-1} & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases}$, 求 $x(n+1)$ 、 $4x(n)$ 和 $x(-n)$ 。

解 $x(n+1)$ 、 $4x(n)$ 和 $x(-n)$ 如图 1.3 所示。

图 1.3 序列 $x(n)$ 的移位、标乘与翻转

$$\begin{aligned}
 x(n+1) &= \begin{cases} 2^{-n-2} & n+1 \geq -1 \\ 0 & n+1 < -1 \end{cases} \\
 4x(n) &= \begin{cases} 2^{-n+1} & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases} \\
 x(-n) &= \begin{cases} 2^{n-1} & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. 累加

设序列为 $x(n)$, 则序列

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.7)$$

定义为对 $x(n)$ 的累加, 表示将 n 以前的所有 $x(n)$ 值求和。

7. 差分

前向差分是将序列先进行左移, 再相减。用 $\Delta x(n)$ 表示 $x(n)$ 的一阶前向差分, 则

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.8)$$

后向差分是将序列先进行右移, 再相减。用 $\nabla x(n)$ 表示 $x(n)$ 的一阶后向差分, 则

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1.9)$$

由此容易得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

以此类推可以定义多阶差分运算。例如, 二阶前向差分和二阶后向差分分别为

$$\begin{aligned}
 \Delta[\Delta x(n)] &= \Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) \\
 &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \\
 \nabla[\nabla x(n)] &= \nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1) \\
 &= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)
 \end{aligned}$$

引入单位延迟算子 D , 有 $Dy(n) = y(n-1)$ 。于是

$$\nabla y(n) = y(n) - y(n-1) = y(n) - Dy(n) = (1-D)y(n)$$

显然, $\nabla = 1-D$ 。因此二阶后向差分可用 ∇ 表示为

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 y(n) &= (1-D)^2 y(n) = (1-2D+D^2)y(n) \\
 &= y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)
 \end{aligned}$$

类似地, k 阶后向差分可表示为

$$\nabla^k y(n) = (1-D)^k y(n)$$

按二项式定理将 $(1-D)^k$ 展开后,便可得到 k 阶差分的表示式。

8. 时间尺度(比例)变换

设序列为 $x(n)$, m 为正整数,则序列

$$y(n) = x(mn) \quad (1.10)$$

和

$$z(n) = \begin{cases} x(n/m) & n = ml, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1.11)$$

定义为对 $x(n)$ 的时间尺度变换。其中, $x(mn)$ 是对 $x(n)$ 进行抽取运算而得到的序列,它不是 $x(n)$ 序列简单地在时间轴上按比例增加到 m 倍,而是以 $1/m$ 倍的取样频率从 $x(n)$ 中每隔 $m-1$ 个点抽取 1 点,因此,将序列 $y(n)$ 称为 $x(n)$ 的抽取序列。 $z(n)$ 是对 $x(n)$ 进行插值运算而得到的序列,它表示在原序列 $x(n)$ 相邻两点之间插入 $m-1$ 个零值点,因此,将序列 $z(n)$ 称为 $x(n)$ 的插值序列。序列 $x(n)$ 的抽取与插值如图 1.4 所示。

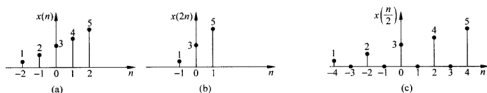


图 1.4 序列 $x(n)$ 的抽取与插值

9. 序列的能量

设序列为 $x(n)$, 则

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.12)$$

定义为序列的能量。它表示序列各取样值的平方之和;若为复序列,取模值后再求平方和。

10. 卷积和

设序列为 $x(n)$ 和 $z(n)$, 则 $x(n)$ 和 $z(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n) = x(n) * z(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z(n-m) \quad (1.13)$$

其中,卷积和用 $*$ 表示。卷积和又称为离散卷积或线性卷积,是很重要的公式。卷积和在图形上可用翻转、移位、相乘和相加四个步骤来计算,如图 1.5 所示。

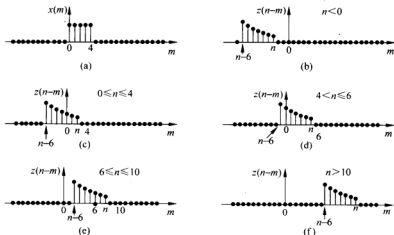
(1) 翻转:首先在中间变量坐标轴 m 上作出 $x(m)$ 和 $z(m)$,将 $z(m)$ 以纵坐标轴为对称轴翻转成 $z(-m)$ 。

(2) 移位:将 $z(-m)$ 移 n 位,得 $z(n-m)$ 。当 n 为正整数时,右移 n 位;当 n 为负数时,左移 n 位。

(3) 相乘:将 $z(n-m)$ 和 $x(m)$ 的 m 值相同的对应点值相乘。

(4) 相加:把所有对应点的乘积累加起来,即得 $y(n)$ 。

依上述方法,取 $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 各值,即可得全部 $y(n)$ 值。在实际求解时,一般可以分几个区间分别加以考虑。

图 1.5 $x(n)$ 与 $z(n)$ 的卷积和解

例 1.3 设序列 $x(n]=R_5(n)$ 、 $z(n)=a^n R_7(n)$, 求 $y(n)=x(n) * z(n)$ 。

解 根据式(1.13), 分区间考虑 $x(m)$ 与 $z(n-m)$, $y(n)$ 的求解过程如图 1.5 所示。

(1) 当 $n < 0$ 时, 由于 $x(m)$ 与 $z(n-m)$ 没有任何重叠, 得 $y(n)=0$ 。

(2) 当 $0 \leq n \leq 4$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z(n-m) = \sum_{m=0}^n a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

(3) 当 $n > 4$, 且 $n-6 \leq 0$, 即 $4 < n \leq 6$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=0}^4 a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^4 a^{-m} = \frac{a^{n-4} - a^{n+1}}{1-a}$$

(4) 当 $n > 6$, 且 $n-6 \leq 4$, 即 $6 < n \leq 10$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=n-6}^4 a^{n-m}$$

设 $k=m-n+6$, 得

$$y(n) = \sum_{k=0}^{10-n} a^{5-k} = a^5 \sum_{k=0}^{10-n} a^{-k} = \frac{a^{n-4} - a^7}{1-a}$$

(5) 当 $n-6 > 4$, 即 $n > 10$ 时, 由于 $x(m)$ 与 $z(n-m)$ 没有任何重叠, 得 $y(n)=0$ 。

1.2.3 几种常用序列

在时域离散信号和系统的理论讨论中, 有几个基本序列特别重要。下面介绍这些常用的离散时间信号。

1. 单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

单位脉冲序列只在 $n=0$ 时取确定值 1, 其他均为零, 如图 1.6 所示。 $\delta(n)$ 也称为单位取样序列, 类似于连续时间信号与系统中的单位脉冲函数 $\delta(t)$ 。但是 $\delta(t)$ 是 $t=0$ 时刻脉宽趋于零, 幅值趋于无限大, 面积为 1 的信号, 是极限概念的信号, 或由分配函数来加以定义。

如果将 $\delta(n)$ 移位 m 位, 则有

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1.15)$$

即 $\delta(n-m)$ 只有在 $n=m$ 时取确定值 1, 而其余点取值均为零。

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

单位阶跃序列类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃函数 $u(t)$ 。但 $u(t)$ 在 $t=0$ 时常不给予定义; 而 $u(n)$ 在 $n=0$ 时定义为 $u(0)=1$, 如图 1.7 所示。

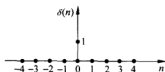


图 1.6 单位脉冲序列

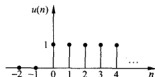


图 1.7 单位阶跃序列

如果将 $u(n)$ 移位 m 位, 则有

$$u(n-m) = \begin{cases} 1 & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (1.17)$$

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.18)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k) \quad (1.19)$$

式(1.19)也可表示为

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1.20)$$

可见, 单位脉冲序列是单位阶跃序列的一阶后向差分, 而单位阶跃序列是对单位脉冲序列的累加。

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1.21)$$

式中: N 为矩形序列的长度。当 $N=5$ 时, $R_5(n)$ 的波形如图 1.8 所示。

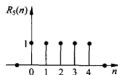


图 1.8 矩形序列

矩形序列 $R_N(n)$ 和 $u(n)$ 、 $\delta(n)$ 的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1.22)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^N \delta(n-m) \quad (1.23)$$

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1.24)$$

式中: a 为实数。当 $|a| < 1$ 时序列是收敛的; 而当 $|a| > 1$ 时序列是发散的。图 1.9 表示 $0 < a < 1$ 时 $a^n u(n)$ 的图形。

5. 正弦序列

$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1.25)$$

式中: A 为幅度; ω 为数字域角频率; φ 为起始相位。图 1.10 为 $\sin(n\pi/4)$ 的波形。

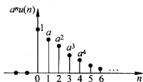


图 1.9 实指数序列 ($0 < a < 1$)



图 1.10 正弦序列

如果正弦序列 $x(n)$ 是由模拟正弦信号 $x_a(t) = \sin \Omega t$ 取样得到, 那么

$$x(n) = x_a(t) |_{t=nT} = \sin(\Omega nT)$$

如果令 $\omega = \Omega T$, 即取样信号值就是在数值上的序列值, 可得

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

由于取样频率 f_s 与取样周期 T 互为倒数, 数字频率 ω 也可表示为

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s \quad (1.26)$$

式(1.26)表明凡是由模拟信号取样得到的序列, 数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 成线性关系, 而且数字频率 ω 是模拟角频率 Ω 对取样频率 f_s 的归一化值。

6. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} \quad (1.27)$$

式中: ω 为数字域角频率。复指数序列可以用其实部与虚部表示为

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{\sigma n} (\cos \omega n + j \sin \omega n) \\ &= e^{\sigma n} \cos \omega n + j e^{\sigma n} \sin \omega n \end{aligned} \quad (1.28)$$

或者用极坐标表示为

$$x(n) = |x(n)| e^{j \arg[x(n)]} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega n} \quad (1.29)$$

如果 $\sigma = 0$, 则 $x(n) = e^{j\omega n}$, 此时复指数序列的实部与虚部都随 n 值以正弦规律变化。由于 n 只取整数, 下面等式成立

$$e^{j(\omega + 2\pi M)n} = e^{j\omega n} \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

上式表明当 $\sigma=0$ 时, 复指数序列的频率具有以 2π 为周期的周期性。

1.2.4 序列的周期性

对于序列 $x(n)$, 如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 满足

$$x(n) = x(n + N) \quad (1.30)$$

则称序列 $x(n)$ 是周期序列, 记为 $\bar{x}(n)$, 最小周期为 N 。

现在讨论正弦序列的周期性。设

$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi)$$

则有

$$x(n + N) = A \sin[\omega(n + N) + \varphi] = A \sin(\omega N + \omega n + \varphi)$$

若

$$\omega N = 2k\pi \quad (k \text{ 为整数})$$

则

$$x(n + N) = A \sin[2k\pi + \omega n + \varphi] = A \sin(\omega n + \varphi) = x(n)$$

注意, k 的取值要保证 N 是最小的正整数。满足这些条件时正弦序列就是周期序列, 其周期为

$$N = \frac{2\pi k}{\omega} \quad (N, k \text{ 为整数})$$

根据 $2\pi/\omega$ 的不同取值, 分几种情况讨论。

(1) 当 $2\pi/\omega$ 为整数时, 只需取 $k=1$, 就能保证 $N=2\pi/\omega$ 为最小正整数。显然, 此时正弦序列为周期序列, 且周期为 $2\pi/\omega$ 。

例 1.4 序列 $x(n) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}n + 3\right)$, 因为 $2\pi/\omega = 8$, 所以是一个周期序列, 其周期 $N=8$ 。

(2) 当 $2\pi/\omega$ 只是有理数而非整数时, 正弦序列仍然是周期序列, 且周期大于 $2\pi/\omega$ 。

例 1.5 序列 $x(n) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}n + 7\right)$, 因为 $2\pi/\omega = 8/3$ 是有理数, 所以是周期序列, 取 $k=3$, 得到其周期 $N=8$ 。

(3) 当 $2\pi/\omega$ 为无理数时, 任何 k 都不能使 N 为正整数, 这时正弦序列不是周期序列。同样, 指数为纯虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

1.2.5 用单位脉冲序列表示任意序列

任何序列都可以用单位脉冲序列的移位加权之和来表示, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.31)$$

根据单位脉冲序列的定义, 则

$$x(m)\delta(n-m) = \begin{cases} x(n) & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

按照卷积和的定义,式(1.31)中 $x(n)$ 的表达式也可看成是 $x(n)$ 和 $\delta(n)$ 的卷积和。

在数字信号处理中单位脉冲序列有着重要的理论价值,因此,用单位脉冲序列来表示序列的方法,对于分析线性时不变系统等非常有用。

例 1.6 序列 $x(n]$ 如图 1.11 所示。 $x(n)$ 可表示为

$$x(n) = a_{-3}\delta(n+3) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

$x(n)$ 可看成单位脉冲序列的移位加权,如图 1.11(a) 所示;也可表示成 $x(n)$ 与 $\delta(n)$ 的卷积和,如图 1.11(b) 所示。

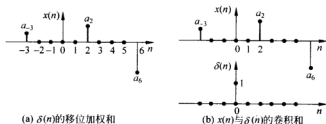


图 1.11 用单位脉冲序列表示序列 $x(n)$

1.3 离散时间系统

1.3.1 离散时间系统的定义及表示

信号处理的主要目的是把信号变换成更符合人们要求的信号形式。离散时间系统就是把输入的离散时间信号变换成输出的离散时间信号形式。因此,离散时间系统可定义为将输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的惟一变换或运算。若以 $T[\cdot]$ 来表示这种运算,则输出与输入之间的关系可表示为

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.32)$$

图 1.12 所示的是系统的框图。对变换 $T[\cdot]$ 加以不同的约束条件,所定义的系统就具有不同的特性和功能。

最重要并且最常用的离散时间系统是线性时不变系统,许多物理过程都可用线性时不变系统表征,而且便于分析。

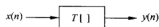


图 1.12 离散时间系统框图

1.3.2 线性时不变系统

1. 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。叠加原理包含可加性和齐次性两方面的性质。设系统的输入序列分别为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$, 系统的输出分别为 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

如果系统的输入为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 之和, 其输出为 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 之和, 即

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \quad (1.33)$$

则该系统具有可加性。

设 a 为常数 ($a \neq 0$), 如果系统的输入增大到 a 倍, 其输出也增大到 a 倍, 即

$$T[ax_1(n)] = ay_1(n) \quad (1.34)$$

则该系统具有齐次性或比例性。

设 a 和 b 为比例常数, 则线性系统满足的定义为

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1.35)$$

不满足可加性或齐次性的系统称为非线性系统。

注意, 要证明一个系统是线性系统时, 必须证明此系统同时满足可加性和齐次性, 而且信号以及任何比例常数都可以是复数。

2. 时不变系统

如果系统的响应与输入信号施加于系统的时刻无关, 则称该系统为时不变系统。即运算关系为 $T[\cdot]$ 的系统在整个运算过程中不随时间而变化。也就是说, 对于输入序列为 $x(n)$ 、输出序列为 $y(n)$ 的系统, 如果输入序列移动任意 m 位后, 其输出序列也移动 m 位, 数值却保持不变, 即

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] \\ y(n-m) &= T[x(n-m)] \end{aligned} \quad (1.36)$$

其中, m 为任意常整数。时不变系统也称为移不变系统。

线性、时不变性是系统的两个方面的特性。一个既满足叠加原理, 又满足时不变性的系统, 被称为线性时不变系统。线性时不变系统在信号处理的应用中起着非常重要的作用, 而且其理论是分析非线性时变系统的基础。本书主要研究线性时不变系统。

例 1.7 试分析下列系统的线性、时不变性:

$$(1) y(n) = 2x(n) - 3,$$

$$(2) y(n) = x(Mn), \text{ 其中 } M \text{ 为正整数。}$$

解 (1) 首先判断系统是否具有线性。

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = 2x_1(n) - 3$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = 2x_2(n) - 3$$

$$ay_1(n) + by_2(n) = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) - 3(a+b)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) - 3$$

显然, 此系统不满足叠加原理, 是非线性系统。

根据时不变性的定义, 有

$$T[x(n-m)] = 2x(n-m) - 3$$

$$y(n-m) = 2x(n-m) - 3$$

二者相等, 因此, 系统具有时不变性。

(2) 根据线性的判断条件, 因为

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(Mn)$$

$$\begin{aligned}
 y_2(n) &= T[x_2(n)] = x_2(Mn) \\
 ay_1(n) + by_2(n) &= ax_1(Mn) + bx_2(Mn) \\
 T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= ax_1(Mn) + bx_2(Mn)
 \end{aligned}$$

所以该系统是线性的。

根据条件判断时不变性,因为

$$\begin{aligned}
 T[x(n-m)] &= x(Mn-m) \\
 y(n-m) &= x[M(n-m)]
 \end{aligned}$$

显然,此系统是时变系统。

同样可证明, $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ 是线性时不变系统,而 $y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$ 是线性时变系统。

1.3.3 单位脉冲响应与卷积和

设线性时不变系统的输入为单位脉冲序列 $\delta(n)$, 系统对应的输出为

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1.37)$$

$h(n)$ 为系统的单位取样响应或单位脉冲响应。任何线性时不变系统都可以用其单位脉冲响应 $h(n)$ 来表征,而且知道 $h(n)$ 后,就可得到此线性时不变系统对任意输入的输出。讨论如下:

根据式(1.31),任意序列 $x(n)$ 可以表示为 $\delta(n)$ 的移位加权和,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

则系统输出为

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

由于线性系统满足叠加原理,则

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$

根据系统的时不变性质,得

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \\
 &= x(n) * h(n) \quad (1.38)
 \end{aligned}$$



图 1.13 线性时不变系统的输入输出之间的关系

式(1.38)就是线性时不变系统的卷积和表达式。这

是一个非常重要的表达式,如图 1.13 所示,表示线性时不变系统的输出等于输入序列和该系统单位脉冲响应的卷积。

1.3.4 线性时不变系统的性质

线性时不变系统满足交换率、结合率和分配率。

1. 交换律

对式(1.38)进行变量置换,代入 $k=n-m$,则

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1.39)$$

这说明,卷积和与两卷积序列的次序无关。如果把 $h(n)$ 作为系统输入, $x(n)$ 作为系统单位脉冲响应,则输出 $y(n)$ 保持不变,如图 1.14 所示。

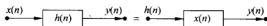


图 1.14 卷积和的交换特性

2. 结合律

卷积和运算服从结合律,即

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

式(1.40)说明,两个线性时不变系统级联后仍构成一个线性时不变系统,其单位脉冲响应为原来两个系统单位脉冲响应的卷积和,且与级联次序无关,如图 1.15 所示。

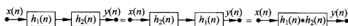


图 1.15 具有相同单位脉冲响应的三个线性时不变系统

3. 分配律

卷积和满足分配律,即

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.41)$$

也就是说,并联的两个线性时不变系统等效于一个系统,其单位脉冲响应等于原来两个系统单位脉冲响应的和,如图 1.16 所示。

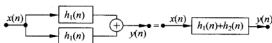


图 1.16 线性时不变系统的并联组合及其等效系统

以上三个性质还可以推广到多个系统的情况,由卷积和的定义可以很容易加以证明。

1.3.5 因果系统和稳定系统

线性和时不变性这两个约束条件确定了一类可以用线性卷积表示的系统。稳定性和因果性是两个附加的约束特性,可以定义出实际应用中一类很重要的系统。

1. 因果系统

因果系统是指某时刻的输出 $y(n)$ 只取决于此时此刻的 $x(n)$ 和此时刻以前的输入 $x(n-1)$,

$x(n-2), \dots$, 而和此时刻以后的输入 $x(n+1), x(n+2), \dots$ 无关的系统。即因果系统的响应不会出现在外加输入之前, 这反映了先因后果的特征。相反, 如果系统当前的输出还取决于将来的输入, 则不符合因果关系, 这样的系统称为非因果系统。因果系统是物理可实现的系统。非因果系统是不可实现的系统。

因果性定理 线性时不变系统具有因果性的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1.42)$$

证明 首先证明充分条件。若 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 则由式(1.38)得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=n-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

因而 n_0 时刻的输出为

$$y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x(m)h(n_0-m)$$

可见, $y(n_0)$ 只与 $m \leq n_0$ 时的 $x(m)$ 有关, 因而系统是因果系统。

利用反证法证明必要条件。已知系统为因果系统, 假设 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} x(m)h(n-m) \end{aligned}$$

第二个求和式中至少有一项不为零, $y(n)$ 将至少和 $m > n$ 时的某一个 $x(n)$ 值有关, 这不符合因果性, 假设不成立。因而 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$ 是因果性的必要条件。

依照因果性定理, 将 $n < 0, x(n) = 0$ 的序列称为因果序列, 表示这个因果序列可以作为一个因果系统的单位脉冲响应。

必须注意, 非因果系统在理论上是存在的, 例如, 理想低通滤波器以及理想微分器都是非因果系统, 但它们是不可实现的。在实际数字信号处理中, 某些系统是非实时的, 即使实时系统也允许存在一定的延时, 待处理数据可以事先记录下来, 例如语音处理、气象、地球物理学等。在这些场合下, 为了产生某个输出 $y(n)$, 已存储的“将来”输入值 $x(n+1), x(n+2), \dots$ 可被调用, 而不会局限于用因果系统来处理这类数据。因此, 在具有较大延时的情况下, 可以用因果系统去逼近非因果系统。

例 1.8 判断前向差分系统 $y(n) = x(n+1) - x(n)$ 的因果性。

解 因为前向差分系统的 $y(n)$ 决定于 $x(n+1)$, 故系统为非因果的。

而后向差分系统定义为 $y(n) = x(n) - x(n-1)$, 显然是因果的。

2. 稳定系统

稳定系统是指对于系统的每个有界输入, 对应产生的输出也都是有界的系统。即如果输入满足 $|x(n)| \leq M < +\infty$ (M 为正常数), 有输出 $|y(n)| \leq P < +\infty$ (P 为正常数), 则此系统是稳定系统。

稳定性定理 线性时不变系统稳定的充分必要条件是其单位脉冲响应绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \quad (1.43)$$

现证明如下。

证明 充分条件:若式(1.43)成立,对于所有 n 都有 $|x(n)| \leq M$,由式(1.39)得

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| |x(n-m)| \\ &\leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| < +\infty \end{aligned}$$

即输出 $y(n)$ 有界,系统稳定。充分性得证。

必要条件:利用反证法,假设系统稳定,但其单位脉冲响应不是绝对可和,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = +\infty$$

定义一个有界输入

$$x(n) = \begin{cases} 1 & h(-n) \geq 0 \\ -1 & h(-n) < 0 \end{cases}$$

由式(1.39)得

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = +\infty \end{aligned}$$

即 $y(0)$ 无界,系统不稳定,因此,假设不成立。必要条件得证。

例 1.9 判断累加器系统的稳定性,其输入输出关系为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)$$

解 考虑一个有界输入 $x(n)=u(n)$,累加器的输出为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m) = \begin{cases} n+1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

虽然当 n 为有限值时,系统的输出也为有限值,但对于所有的 n 值(包括 $+\infty$)不存在有限值 P ,使得 $(n+1) \leq P < +\infty$,故系统输出无界。

要判断系统是不稳定的,只要找出一个特别的有界输入,对应的输出是无界的,则该系统就是不稳定的。但是要判断系统是稳定的,必须证明对于所有有界输入下,其输出都是有界的。

例 1.10 已知线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 为

$$h(n) = a^n u(-n-1)$$

式中的 a 为实常数,讨论其因果性和稳定性。

解 因为 $n < 0$ 时, $u(-n-1)=1$,所以 $h(n) \neq 0$,故系统是非因果系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-1}^{-\infty} |a^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a|^{-n} = \begin{cases} \frac{1}{|a|-1} & |a| > 1 \\ +\infty & |a| \leq 1 \end{cases}$$

所以 $|a| > 1$ 时系统稳定, $|a| \leq 1$ 时系统不稳定。当 $|a| > 1$ 时, $h(n)$ 的模值随 n 加大而减小, $h(n)$ 称为收敛序列;当 $|a| \leq 1$ 时, $h(n)$ 的模值随 n 加大而加大, $h(n)$ 称为发散序列。

1.4 线性常系数差分方程

描述一个系统,可以只研究系统的输入与输出关系,而不考虑系统内部的情况。对于模拟系统,用微分方程描述输入与输出关系;对于连续时间线性时不变系统,常用线性常系数微分方程表示系统的输入与输出关系。对于离散时间系统,则用差分方程描述或研究输入与输出关系;对于离散时间的线性时不变系统,常用线性常系数差分方程表示系统的输入与输出关系。

1.4.1 离散时间系统的数学模型——差分方程

差分方程是描述函数序列差分之间关系的方程,由序列及其各阶差分进行线性叠加组成。例如,对于一个二阶差分方程

$$\nabla^2 y(n) + \nabla y(n) - 6 = 0$$

将 $\nabla = 1 - D$ 代入方程,得到

$$(1 - D)^2 y(n) + (1 - D)y(n) - 6 = 0$$

展开后得到

$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) - 3 = 0$$

这就是一个二阶线性常系数差分方程。

差分方程描述了离散时间系统的输入与输出关系。如果系统具有线性时不变性,则其数学模型是线性常系数差分方程,其一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.44)$$

用式(1.44)描述的系统不必是因果的。但是,大多数情况下都假设式(1.44)描述的是因果系统。将式(1.44)变换后得到

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) \quad (1.45)$$

式中: $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别为系统的输入序列和输出序列,决定系统特征的系数 $a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_M$ 均为常数。

与线性微分方程相似,式中 $x(n-r)$ 和 $y(n-k)$ 项都只有一次幂且不存在它们的相乘项,也没有相互交叉项,否则就是非线性的。若系数中含有 n ,则称为线性“变系数”差分方程。差分方程的阶数等于未知序列,也就是 $y(n-k)$ 项变量 k 的最大值与最小值之差。例如式(1.44)和式(1.45)中, $y(n-k)$ 项 k 的最大值为 N , k 的最小值为 0 ,因此,该差分方程的阶数为 N ,称为 N 阶差分方程。

差分方程不仅在理论上可用来表示系统,而且也可以根据差分方程在计算机上来实现系统。由差分方程可以直接得到系统输入变换成输出的运算结构。例如一个一阶差分方程为

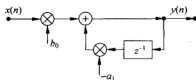


图 1.17 一阶差分方程的运算结构

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$$

则用方框图表示运算结构如图 1.17 所示。 $b_0 x(n)$ 表示将输入 $x(n)$ 乘上常数 b_0 , $-a_1 y(n-1)$ 表示将序列 $y(n)$ 延时一位后乘以常数 $-a_1$, 将这两个结果相加就得到 $y(n)$ 序列。图中 \oplus 代表相加器, \otimes 代表乘法器, z^{-1} 代表延时一位的延时单元。

1.4.2 线性常系数差分方程求解

为了确定系统的响应,需要对差分方程进行求解。差分方程的确定解不仅与差分方程的形式有关,而且还与其初始条件有关,因此,求解差分方程必须给定初始状态。

式(1.44)的求解实际上是求离散时间系统的全响应,包括系统的零输入响应 $y_1(n)$ 和零状态响应 $y_2(n)$ 。系统的全响应是差分方程的全解 $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ 。求解线性常系数差分方程可以用时域求解法,也可以用变换域求解法。变换域求解法将在第 2 章的 Z 变换中讨论。

1. 零输入响应

系统的零输入响应是对应的齐次差分方程的通解,该齐次解是方程中含有 $x(n)$ 的各项都为零时系统的输出,它反映了系统本身的物理特性。与式(1.44)对应的齐次方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.46)$$

设通解为 ca^n , 将通解代入式(1.46)得

$$\sum_{k=0}^N a_k c a^{n-k} = 0$$

由于 ca^n 对任何有限的 n 值均不为零,展开上式得

$$a_0 + a_1 a^{-1} + a_2 a^{-2} + \cdots + a_N a^{-N} = 0$$

两边乘以 a^N 得

$$a_0 a^N + a_1 a^{N-1} + a_2 a^{N-2} + \cdots + a_N = 0 \quad (1.47)$$

式(1.47)是式(1.46)的特征方程。若特征方程有相异根 $a_i, i=1, 2, \cdots, N$, 则式(1.47)的齐次通解为

$$y_1(n) = \sum_{i=1}^N c_i a_i^n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n + \cdots + c_N a_N^n \quad (1.48)$$

若特征方程有 1 个 m 重根 a_1 , 则齐次通解为

$$y_1(n) = c_1 n^{m-1} a_1^n + c_2 n^{m-2} a_1^n + \cdots + c_{m-1} n a_1^n + c_m a_1^n \\ + c_{m+1} a_2^n + c_{m+2} a_3^n + \cdots + c_{N-1} a_{N-m}^n + c_N a_{N-m+1}^n \quad (1.49)$$

与微分方程的求解方法相类似,式(1.48)和式(1.49)中的常数 c_i 由方程的初始条件确定。

齐次解具有指数形式,如果要求系统稳定,则每个特征根 a_i 的模都应小于 1, 即 $|a_i| < 1$ 。

例 1.11 求下列齐次差分方程的通解

$$\begin{cases} y(n) - y(n-1) - 6y(n-2) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 5 \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$

特征根为

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 3$$

于是齐次差分方程的通解为

$$y(n) = c_1(-2)^n + c_2 3^n$$

代入初始条件,可求得

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1$$

因此,通解为

$$y(n) = -(-2)^n + 3^n$$

2. 零状态响应

系统的零状态响应是差分方程的一个特解,该特解反映了系统在输入的作用下强迫运动的情况。求特解的方法主要有卷积法和递推法。卷积法用于系统初始状态为零时的求解;递推法较简单,但是只能得到数值解,不易直接得到闭合形式(公式)解答。

这里主要介绍卷积法。将式(1.44)写成 D 算子的形式,即

$$\sum_{k=0}^N a_k D^k y(n) = \sum_{r=0}^M b_r D^r x(n)$$

可求得

$$y(n) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r D^r}{\sum_{k=0}^N a_k D^k} x(n) = H(D)x(n) \quad (1.50)$$

设 $M < N$, 其中

$$\begin{aligned} H(D) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r D^r}{\sum_{k=0}^N a_k D^k} = \frac{b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_M D^M}{a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_N D^N} \\ &= \frac{A_1}{1 - a_1 D} + \frac{A_2}{1 - a_2 D} + \cdots + \frac{A_N}{1 - a_N D} \end{aligned}$$

令 $x(n) = \delta(n)$, 则式(1.50)变为

$$\begin{aligned} h(n) &= H(D)\delta(n) = \frac{A_1}{1 - a_1 D} \delta(n) + \frac{A_2}{1 - a_2 D} \delta(n) + \cdots + \frac{A_N}{1 - a_N D} \delta(n) \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(n) \end{aligned}$$

式中:

$$h_i(n) = \frac{A_i}{1 - a_i D} \delta(n) = A_i (1 + a_i D + a_i^2 D^2 + \cdots) \delta(n) = A_i a_i^n u(n)$$

因此

$$h(n) = \sum_{i=1}^N A_i a_i^n u(n)$$

方程的特解为

$$y_z(n) = h(n) * x(n) = \left[\sum_{i=1}^N A_i a_i^n u(n) \right] * x(n) \quad (1.51)$$

例 1.12 设一个因果线性时不变系统由差分方程 $y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$ 描述,求系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应。

解 为求单位脉冲响应,首先令 $x(n) = \delta(n)$,于是有

$$h(n) - 3h(n-1) + 2h(n-2) = \delta(n)$$

或写成 D 算子形式

$$h(n) - 3Dh(n) + 2D^2h(n) = \delta(n)$$

由此求出

$$h(n) = \frac{1}{1-3D+2D^2}\delta(n) = \left(\frac{2}{1-2D} - \frac{1}{1-D} \right) \delta(n)$$

因此

$$h(n) = (2 \times 2^n - 1^n)u(n)$$

求单位阶跃响应就是求系统在零状态下,对单位阶跃输入 $u(n)$ 的响应,即求特解。根据卷积法,系统的单位阶跃响应为

$$y_z(n) = h(n) * u(n) = [(2 \times 2^n - 1^n)u(n)] * u(n) = (2^{n+2} - n - 3)u(n)$$

递推法只对某些特别输入才有效。考察式(1.44)或者式(1.45)可以看出,如果要求计算 n 时刻的输出,则需要知道 n 时刻以及 n 时刻以前的输入序列值,还要知道 n 时刻以前的 N 个输出信号值。因此,求解差分方程除了给定输入序列的条件外,还需要 N 个初始条件才能得到方程的惟一解。

将式(1.45)中的 n 用 $n+1$ 代替,即可求出 $n+1$ 时刻的输出,说明式(1.45)表示的差分方程本身适合用递推法求解。

例 1.13 已知一个因果线性时不变系统的差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$,设初始条件 $y(-1) = 0$,求系统的单位脉冲响应。

解 令 $x(n) = \delta(n)$,则有

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$$

由于系统具有因果性,递推如下

$$h(n) = 0, n < 0$$

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2$$

$$\vdots$$

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n) = a^n, \quad n \geq 0$$

即

$$h(n) = a^n u(n)$$

例 1.14 线性常系数差分方程 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$, 设初始条件为 $y(n)=0$ ($n>0$ 时), 求输入 $x(n)=\delta(n)$ 时系统的输出序列。

解 递推关系为 $y(n-1)=a^{-1}(y(n)-\delta(n))$, 求输出的递推过程如下

$$y(0) = a^{-1}(y(1) - \delta(1)) = 0$$

$$y(-1) = a^{-1}(y(0) - \delta(0)) = -a^{-1}$$

$$y(-2) = a^{-1}(y(-1) - \delta(-1)) = -a^{-2}$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = a^{-1}(y(n) - \delta(n)) = -a^{n-1}u(-n)$$

将 $n-1$ 用 n 代替, 得到

$$y(n) = -a^n u(-n-1)$$

求得的输出序列 $y(n)$ 是非因果的信号, 这说明线性常系数差分方程并不一定代表因果系统。在以后的讨论中, 都假设线性常系数差分方程代表线性时不变系统, 且多数代表可实现的因果系统。

1.5 连续时间信号的取样

连续时间信号变为数字信号是通过“取样”得到的, 如图 1.18 所示由取样器实现取样功能。取样器可以看成是一个每隔时间 T 秒闭合一次的电子开关 S , 如图 1.18(a) 所示。开关每接通一次, 就可在输出端得到一个取样值。对理想取样, 开关闭合时间应无穷短。但实际取样时, 开关闭合时间为 τ 秒 ($\tau \ll T$), 可以把取样过程看成是脉冲调幅过程, 调制信号为 $x_a(t)$, 被调脉冲载波信号 $p(t)$ 是脉宽为 τ 、周期为 T 的周期性矩形脉冲串, 取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 或 $x_a(nT)$ 就是 $x_a(t)$ 与矩形脉冲串 $p(t)$ 相乘的结果, 取样过程如图 1.18(a) 所示。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 得到的是理想取样, 如图 1.18(b) 所示。

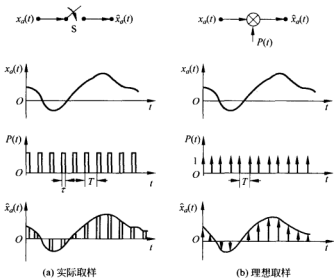


图 1.18 连续时间信号的取样

1.5.1 理想取样

在图 1.18 所示的开关闭合时间 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况下, 矩形脉冲串变成脉冲序列 $p(t)$, 各脉冲准确地出现在取样时刻 $t=nT$, 面积为 1。取样后输出理想取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 的幅度等于输入信号 $x_a(t)$ 在取样瞬间的幅度。单位取样脉冲序列为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (1.52)$$

理想取样输出为

$$\begin{aligned} \hat{x}_s(t) &= x_a(t) \cdot p(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t) \delta(t-nT) \end{aligned} \quad (1.53)$$

式中: $\delta(t-nT)$ 在 $t=nT$ 时为 1, 其他时刻为零, 所以

$$\hat{x}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \quad (1.54)$$

由于 $p(t)$ 是周期函数, 可展开成傅里叶级数, 即

$$p(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r e^{jr\Omega_s t}$$

级数的基频为取样频率, 即

$$\Omega_s = 2\pi/T, \quad f_s = 1/T$$

式中: $\Omega_s = 2\pi/T$ 称为取样角频率, 单位为 rad/s; $T=1/f_s$, f_s 是取样频率, 单位为 Hz。级数的系数 c_r 为

$$c_r = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) e^{-jr\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) e^{-jr\Omega_s t} dt$$

考虑在 $|t| \leq T/2$ 的区间内, 只有一个脉冲 $\delta(t)$, 而 $n \neq 0$ 时的 $\delta(t-nT)$ 都在积分区间之外, 得

$$c_r = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jr\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T}$$

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t}$$

于是 $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$p(j\Omega) = F\left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t}\right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \quad (1.55)$$

$X_s(j\Omega)$ 可表示为

$$X_s(j\Omega) = F[\hat{x}_s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1.56)$$

在傅里叶变换中, 两信号相乘的傅里叶变换等于两信号分别作傅里叶变换的卷积, 于是由式(1.53)得 $\hat{x}_s(t)$ 的频谱可表示为

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_s(j\Omega) &= F[x_s(t) \cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_s(j\Omega) * p(j\Omega) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s(j\Omega) * \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s(j\Omega - jr\Omega_s)
 \end{aligned} \quad (1.57)$$

式(1.57)表明,连续时间信号经过理想取样后,其频谱将沿着频率轴,以取样频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为间隔重复出现原信号的频谱。也就是说,取样信号的频谱 $\hat{X}_s(j\Omega)$ 是原信号频谱 $X_s(j\Omega)$ 以 Ω_s 为周期的周期延拓,这些频谱都要乘以系数 $1/T$,如图 1.19 所示。

在图 1.19(a)中, $X_s(j\Omega)$ 是带限信号,最高截止频率为 Ω_c ,其频谱称为基带频谱。为了使周期延拓后的频谱不发生混叠,必须满足 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$,如图 1.19(c)所示。这时如果利用低通滤波器,则可以从频谱 $\hat{X}_s(j\Omega)$ 中恢复出原信号的频谱。也就是说,可以从信号 $\hat{x}_s(t)$ 中恢复出原连续时间信号 $x_s(t)$ 。但是,如果选择的取样频率 Ω_s 过低,或者说信号的最高频谱 Ω_c 超过 $\Omega_s/2$,则周期延拓后各相邻分量会发生混叠,如图 1.19(d)所示。

由此得出以下结论:

(1) 对连续时间信号进行理想取样后,取样信号的频谱是原信号频谱周期延拓形成的,其周期等于取样频率 Ω_s 。

(2) 如果连续时间信号 $x_s(t)$ 是最高截止频率为 Ω_c 的带限信号,如果取样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$,那么取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 通过一个增益为 T ,截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器,则可以惟一地恢复出原连续时间信号 $x_s(t)$ 。否则 $\Omega_s < 2\Omega_c$ 会造成取样信号中的频谱混叠现象,不可能无失真地恢复原连续时间信号。取样频率的一半 $\Omega_s/2$ 称为折叠频率。等于信号最高频谱两倍的取样频率 $\Omega_s (= 2\Omega_c)$ 称为奈奎斯特频率。

一般在实际中,为了避免频谱混叠现象,取样频率选得比 $2\Omega_c$ 更高,例如 $3\Omega_c \sim 4\Omega_c$ 。另外,可以在取样之前加保护性前置低通滤波器,阻止高于 $2\Omega_c$ 的无用高频分量和杂散信号进入取样器。

1.5.2 信号恢复

取样定理表示的是取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 的频谱与原连续时间信号 $x_s(t)$ 的频谱之间的关系,以及由取样信号不失真地恢复原信号的条件,图 1.20 表示取样信号经过理想低通滤波器恢复原信号的过程。

设理想低通滤波器的频谱特性为

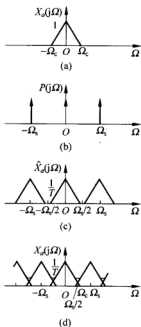


图 1.19 取样信号的频谱

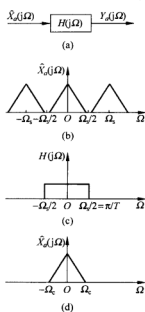


图 1.20 取样恢复

$$H_s(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{1}{2}\Omega_s \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{1}{2}\Omega_s \end{cases} \quad (1.58)$$

取样信号经过理想低通滤波器后的频谱为

$$Y_s(j\Omega) = F[y_s(t)] = \hat{X}_s(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

两边取傅里叶逆变换,得

$$y_s(t) = x_s(t)$$

从而不失真地恢复出原连续时间信号 $x_a(t)$ 。

根据连续时间信号傅里叶逆变换公式,求得理想低通滤波器的单位脉冲响应 $h(t)$,即

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin \frac{\Omega_s}{2} t}{\frac{\Omega_s}{2} t}$$

由于 $\Omega_s = 2\pi/T$,因此 $h(t)$ 也可以表示为

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)} \quad (1.59)$$

于是

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \hat{x}_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) \delta(\tau-nT) \right] h(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(nT) \delta(\tau-nT) h(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) h(t-nT) \end{aligned} \quad (1.60)$$

由式(1.59)得

$$h(t-nT) = \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1.61)$$

$h(t-nT)$ 称为内插函数。将式(1.61)代入式(1.60)中,得到

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1.62)$$

式(1.62)就是从取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 中恢复出原连续时间信号 $x_a(t)$ 的取样内插公式。内插函数在 $t=nT$ 的取样点上的值为 1, 在其余取样点上的值为 0, 如图 1.21 所示。这样在取样点上 $x_a(t) = x_s(nT)$, 而在取样点之间, $x_a(t)$ 由各取样值乘以 $h(t-nT)$ 的波形伸展叠加而成, 如图 1.22 所示。这种用理想低通滤波器恢复的信号完全等于原连续时间信号 $x_a(t)$, 是一种不失真的恢复。但由于 $h(t-nT)$ 是非因果的, 因此, 理想低通滤波器是非因果不可实现的。

在实际中, 常用零阶保持器实现低通滤波器功能, 能够起到将取样信号恢复成连续时间

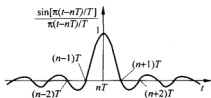


图 1.21 内插函数

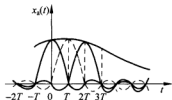


图 1.22 取样的内插恢复

信号的作用。但由于零阶保持器的特性与理想低滤波器的特性有明显的差别,表现在时域上的输出波形不够平滑有阶跃。为此需要在后级加平滑滤波器,该滤波器是一个模拟低通滤波器,用于滤除不必要的高频分量,起到平滑波形的作用。

1.6 Matlab 实现

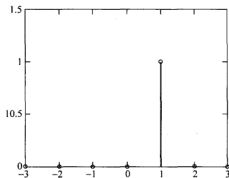
1.6.1 常用序列的 Matlab 实现

1. 单位脉冲序列

在 Matlab 中,编写并运行下列程序段,生成移位的单位脉冲序列 $\delta(n-1)$ 。

```
>>n = [-3:3];           % 生成位置向量
x = [(n-1) == 0];       % 生成单个脉冲序列
stem(n,x);              % 标示坐标
axis([-3,3,0,1.5]);
```

程序第一行给出 n 的取值范围。第二行使用逻辑语句求满足条件的 n 值,只在 $n=1$ 处 x 为 1,其余的 n 值处 x 均为 0,因而得到移位为 1 的单位脉冲序列。第三行使用绘图函数 `stem` 来绘制序列,运行结果如图 1.23 所示。

图 1.23 单位脉冲序列 $\delta(n-1)$

为了方便调用,可以建立一个函数文件 `impseq.m` 用于生成单位脉冲序列,其中输入参数 n_0 为序列的起点位置, n_1 为脉冲施加的位置, n_2 为序列的终点位置,要求 $n_0 \leq n_1 \leq n_2$ 。

```
function [x,n] = impseq(n0,n1,n2)
% 单位脉冲序列生成函数 x(n) = delta(n-n0)
% 调用方式 [x,n] = impseq(n0,n1,n2)
n = [n0:n2];           % 生成位置向量
x = [(n-n1) == 0];     % 生成单个脉冲序列
```

这样只需要调用生成函数,如利用 $[x,n] = \text{impseq}(-3,1,3)$ 语句就能生成移位为 1 的单位脉冲序列,然后运行绘图函数 $\text{stem}(n,x)$,同样得到图 1.23 的单位脉冲序列。

思考练习

在 Matlab 程序段中,如果需要生成幅值为 2 的脉冲序列,可以修改逻辑语句为 $x = 2 * [(n-1) == 0]$,或者修改绘图语句为 $\text{stem}(h, 2 * x)$,比较并指出两种修改方法的不同。

2. 单位阶跃序列

在 Matlab 中,编写并运行下列程序段,生成单位阶跃序列 $u(n-1)$ 。

```
>>n = [-3: 3];           % 生成位置向量
x = [(n+1) >= 0];        % 生成阶跃序列
stem(n,x); axis([-3,3,0,1.5]);
```

与单位脉冲序列的程序段比较,阶跃序列程序段的第二行使用逻辑语句求满足条件的 n 值,当 $n \geq -1$ 时 x 为 1,其余的 n 值处 x 均为 0,因而得到移位为 1 的单位阶跃序列。运行结果如图 1.24 所示。

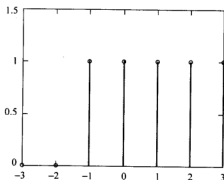


图 1.24 单位阶跃序列 $u(n-1)$

同样可以建立一个函数文件 `stepseq.m`,用于生成单位阶跃序列,其中输入参数 $n0$ 为序列的起点位置, $n1$ 为阶跃序列施加的位置, $n2$ 为序列的终点位置,要求 $n0 \leq n1 \leq n2$ 。

```
function [x,n] = stepseq(n0,n1,n2)
% 单位阶跃序列生成函数 x(n) = stepseq(n-n0)
% 调用方式 [x,n] = stepseq(n0,n1,n2)
n = [n0:n2];           % 生成位置向量
x = [(n-n1) >= 0];     % 生成阶跃脉冲序列
```

运行下列程序段调用阶跃序列函数,也可以得到图 1.24 的单位阶跃序列。

```
>>[x,n]=stepseq(-3,-1,3); stem(n,x);
```

思考练习

在 Matlab 函数文件 stepseq.m 中,为了满足 $n_0 \leq n_1 \leq n_2$, 需要利用完整的 if-else-end 语句来检验输入参数的正确性。应该如何修改?

3. 矩形序列

根据序列的定义,可以建立函数文件 rectseq.m 生成矩形序列,其中输入参数 n_0 为序列的起点位置, n_1 为矩形序列施加的位置, n_2 为序列的终点位置, N 为矩形序列的长度,要求 $n_0 \leq n_1 \leq n_2$ 。

```
function [x,n]=rectseq(n0,n1,n2,N)
% 单位矩形序列生成函数
% 调用方式 [x,n]=rectseq(n0,n1,n2,N)
n=[n0:n2];                                     % 生成位置向量
x=[(n-n1)>=0&((n1+N-1)-n)>=0];               % 生成矩形脉冲序列
```

运行下列程序段调用矩形序列函数,得到图 1.25 的矩形序列 $R_5(n-1)$ 。

```
>>[x,n]=rectseq(-3,-1,4,5); stem(n,x); axis([-3,5,0,1.5]);
```

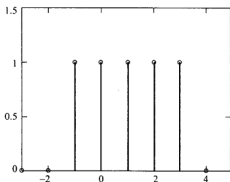


图 1.25 单位矩形序列 $R_N(n-1)$, $N=5$

思考练习

由式(1.22)知矩形序列可以用两个单位阶跃序列之差来表示。如果直接利用阶跃序列函数 stepseq.m 生成 $R_5(n)=u(n)-u(n-5)$, 应该如何编写程序?

4. 实指数序列

在 Matlab 中,编写并运行下列程序段,可以生成实指数序列 $(0.6)^n u(n)$ 。

```

>>n=[0:10];           %生成位置向量
x=(0.6).^n;           %生成实指数序列
stem(n,x); axis([0,10,0,1.5]);

```

程序第一行给出 n 的取值范围。第二行使用“.”实现一个实指数序列。第三行使用绘图函数 `stem` 来绘制序列,运行结果如图 1.26 所示。

5. 正弦序列

在 Matlab 中,编写并运行下列程序段,可以生成正弦序列 $3\sin(0.1\pi n + \pi/3)$ 。

```

>>n=[0:1:20];         %生成位置向量
x=3*sin(0.1*pi*n+pi/3); %生成正弦序列
stem(n,x); axis([0,20,-4,4]);

```

程序第一行给出 n 的取值范围,数字 1 表示 n 的增量为 1。第二行使用函数 `sin` 实现一个正弦序列,使用函数 `cos` 也可以产生余弦序列。运行结果如图 1.27 所示。

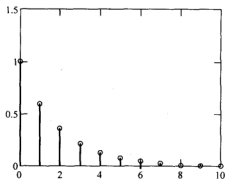


图 1.26 实指数序列 $a^n u(n)$, $a=0.5$

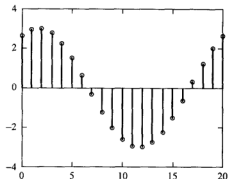


图 1.27 正弦序列 $3\sin(0.1\pi n + \pi/3)$

6. 复指数序列

在 Matlab 中,编写并运行下列程序段,可以生成复指数序列 $e^{(0.2-0.5j)n}$ 。

```

>>n=[-2:10];
x=exp((0.2-0.5j)*n); %复指数序列
subplot(1,2,1),stem(n,real(x)); %用空心圆画点
line([-5,10],[0,0]); %画横坐标
subplot(1,2,2),stem(n,imag(x),'filled'); %用实心圆画点
% line([-5,10],[0,0]);

```

程序第二行使用函数 `exp` 实现一个复指数序列。第三行使用 `subplot` 表示子图 1, `stem` 绘制复指数序列的实部 `real(x)`。第四行使用 `line` 画子图 1 的横坐标。第五行使用 `subplot` 表示子图 2, `stem` 使用了输入参数 `filled`,表示用实心圆点绘制复指数序列的虚部 `imag(x)`。最后一行使用 `line` 画子图 2 的横坐标,但用 % 注释后不执行该语句。运行结果如图 1.28 所示。

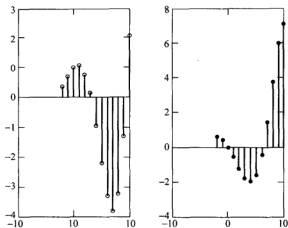


图 1.28 复指数序列

思考练习

在 Matlab 的绘图语句 stem 中, 可以用 'x' 代替 'filled', 比较使用两种输入参数的效果。最后一行删除 %, 运行程序并比较有何不同?

1.6.2 序列运算的 Matlab 实现**1. 翻转**

在 Matlab 中, 翻转由两次调用 fliplr 函数来实现。

```
>>n = [-3; 3]; x = [0, 0.1, 0.5, 0.25, 0.125, 0]; stem(n, x);
x = fliplr(x); n = -fliplr(n); stem(n, x);
```

程序第一行生成一个序列, 第二行用函数 fliplr(x) 将 x 中元素排列的次序左右翻转, 用 $n = -\text{fliplr}(n)$ 将向量 n 中对 $n=0$ 点左右翻转。

思考练习

分别运行上面 Matlab 程序中的第一、二行, 比较两次得到的序列有何不同? 删除第二行中 $n = -\text{fliplr}(n)$ 的负号, 再次分别运行程序第一、二行并比较不同?

2. 序列的能量

在 Matlab 中, 使用函数 conj 求共轭复数。有限长序列 x 的能量可以使用以下两种方法实现。

```
>>E = sum(x. * conj(x));
>>E = sum(abs(x).^2);
```

3. 卷积和

卷积和可以用翻转、移位、相乘和相加基本运算来实现,但用起来很不方便。Matlab 提供了内部函数 `conv` 来计算两个有限长序列的线性卷积。

```
>>x=[3,-3,7,0,-1,5,2];           % 序列 x 的非零区间 -4≤n≤2
h=[2,3,0,-5,2,1];                 % 序列 x 的非零区间 -1≤n≤4
y=conv(x,h);
```

函数 `conv` 假定两个序列从 $n=0$ 开始,返回值中只有卷积的结果,没有包含输入序列的位置信息,但是由线性卷积的性质可以分析输出序列的位置信息。程序的运行结果为

```
y=6 3 5 6 19 -31 30 18 -27 -1 9 2
```

如果需要直接得到卷积和的数值和位置向量,可以将函数 `conv` 进行修改,建立一个函数文件 `convextd.m` 用于求序列 x 和 h 的卷积和序列 y 。其中输入参数 nx 和 nh 为序列 x 和 h 的位置向量,输出参数 ny 为序列 y 的位置向量。

```
function [y,ny]=convextd(x,nx,h,nh)
% 序列 y 为序列 x 和序列 h 的卷积
% ny,nx,nh 分别为序列 y,x 和 h 的位置向量
% 调用方式 [y,ny]=convextd(x,nx,h,nh)
ny1=nx(1)+nh(1);           % 计算卷积后的起点位置
ny_end=nx(end)+nh(end);    % 计算卷积后的终点位置
y=conv(x,h);                % 计算卷积和序列的数值
ny=[ny1 ny_end];           % 计算卷积和序列的位置向量
```

在运行下列程序段调用修改后的卷积和函数 `convextd` 后,就能直接得到卷积和的数值和位置向量。

```
>>x=[3,-3,7,0,-1,5,2]; nx=[-4;2]; % 给定输入序列
h=[2,3,0,-5,2,1]; nh=[-1;4];     % 给定脉冲响应序列
[y,ny]=convextd(x,nx,h,nh);       % 带位置序列的卷积结果
```

程序的运行结果为

```
y=      6      3      5      6     19    -31     30     18    -27     -1      9      2
ny=    -5     -4     -3     -2     -1      0      1      2      3      4      5      6
```

1.6.3 Matlab 求解离散系统的差分方程

差分方程求解在 Matlab 中用函数 `filter` 来实现,函数的调用方式为

```
>>y=filter(b,a,x);
```

其中,输入参数 $b=[b_0, b_1, \dots, b_M]$, $a=[a_0, a_1, \dots, a_N]$ 为差分方程的系数, x 是输入序列,求得的输出序列 y 和输入 x 的长度一样,另外系数 a_0 必须不为零。

例 1.15 线性常系数差分方程 $y(n)-y(n-1)+0.75y(n-2)=x(n)$, 求输入 $x(n)=\delta(n)$ 时系统的输出序列。

解 运行下列程序段,求单位脉冲响应 $h(n)$ 。

```
>>b=1; a=[1,-1,0.75]; x=impseq(-10,0,50); %生成单位脉冲序列
h=filter(b,a,x); %计算单位脉冲响应
n=[-10; 50]; stem(n,h); %画出脉冲响应曲线
axis([-10,50,-1.5,1.5]) %标出坐标
title('Impulse Response'); xlabel('n'); ylabel('h(n)');
```

如果需要判断系统是否稳定,可以用程序求得单位脉冲响应的和为 6.1718,即绝对可和,根据线性时不变系统稳定的充分必要条件,说明系统是稳定的。从图 1.29 中也可以看出系统的单位脉冲响应曲线逐渐趋于零。

```
>>sum(abs(h)); %计算单位脉冲响应的和
```

程序的运行结果为

```
ans = 6.1718
```

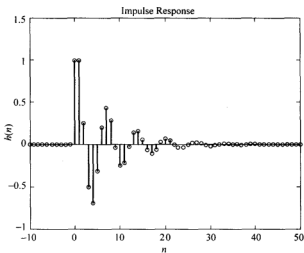


图 1.29 例 1.15 系统的单位脉冲响应

习 题

1.1 用图表示下列序列。

- (1) $x(n) = 2^{n-1}u(n-2)$
- (2) $x(n) = u(n-3) - u(-n+2)$
- (3) $x(n) = 2^n R_4(n)$

1.2 给定信号

$$x(n) = \begin{cases} 2n+7 & -5 < n < 0 \\ n-2 & -1 < n < 5 \\ 0 & 4 < n, n < -4 \end{cases}$$

- (1) 画出表示序列 $x(n)$ 的图形;
- (2) 用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 及其加权和表示 $x(n)$;
- (3) 画出表示序列 $y_1(n) = 2x(n-2)$ 的图形;
- (4) 画出表示序列 $y_2(n) = x(-n+3)$ 的图形。

1.3 给定信号 $x(n) = 2^*R_5(n)$, 试画出 $x(2n)$ 和 $x(n/2)$ 的图形。

1.4 判断下列序列是否是周期性的,若是周期性的,试确定其最小周期。

$$(1) x(n) = A \sin\left(\frac{2\pi}{7}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) x(n) = e^{j(\frac{\pi}{7} + \pi)}$$

$$(3) x(n) = e^{(2-jn)n}$$

1.5 已知序列 $x(n)$ 和 $z(n)$, 试求序列的卷积和 $x(n) * z(n)$ 。

$$(1) x(n) = 2^n u(-n-1), z(n) = 0.5^n u(n)$$

$$(2) x(n) = \lambda^n u(n), z(n) = u(n)$$

1.6 判断下列系统的线性及时不变性。

$$(1) y(n) = -3x(n) + 2$$

$$(2) y(n) = -3x(n) + 2x(n-1)$$

$$(3) y(n) = x(-n)$$

$$(4) y(n) = -2x(n^2)$$

$$(5) y(n) = |x(n)|^2$$

$$(6) y(n) = x(n) \sin(\omega n)$$

1.7 已知线性时不变系统的输入 $x(n) = R_4(n)$, 分别用图解法和解析法求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$, 并用图表示。

1.8 试确定以下系统的线性、时不变性、因果性和稳定性。

$$(1) y(n) = n^2 x(n)$$

$$(2) y(n) = x(n - n_0)$$

$$(3) y(n) = e^{x(n)}$$

$$(4) y(n) = \sum_{k=-n_0}^n x(k)$$

1.9 证明线性卷积满足交换律、结合律和分配律。

1.10 已知系统的单位脉冲响应为 $h(n) = a^{-n} u(-n-1)$ ($0 < a < 1$), 试求系统的单位阶跃响应。

1.11 已知差分方程 $y(n] - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4x(n)$, 且初始条件为 $y(-1) = 2$, $y(-2) = 1$, 求输入是 $x(n) = (2-3n)u(n)$ 时系统的响应。

1.12 已知差分方程 $y(n] + 2\cos\beta y(n-1) + y(n-2) = 0$, 且 $y(0) = 0, y(1) = 1$, 求 $y(n)$ 。

1.13 已知一个因果的线性时不变系统由以下差分方程描述

$$y(n] - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n] + \frac{1}{2}y(n-1)$$

(1) 求该系统的单位脉冲响应;

(2) 利用卷积和求输入 $x(n) = e^{j\omega n}$ 时系统的响应。

1.14 已知系统的单位脉冲响应为 $h(n) = 0.3^n u(n)$, 初始状态为零, 系统输入序列为 $x(n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, 用递推法求系统的输出 $y(n)$ 。

1.15 一个理想取样系统, 取样频率为 $\Omega_s = 8\pi$, 取样后信号经过理想低通滤波器 $H_a(j\Omega)$ 还原。其中

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{4} & |\Omega| < 4\pi \\ 0 & |\Omega| \geq 4\pi \end{cases}$$

对于输入 $y_{s_1}(t) = \cos 2\pi t$, $y_{s_2}(t) = \cos 5\pi t$, 问 ω 最大不能超过多少时, 输出信号 $y_a(t)$ 有无失真? 为什么?

1.16 已知一个连续时间信号为 $x_a(t) = \cos(2\pi \times 100t + \pi/2)$

(1) 计算 $x_a(t)$ 的周期;

(2) 以取样周期 T 对 $x_a(t)$ 取样, 要求能不失真地恢复原信号, 计算取样频率至少应为多少赫兹? 取样时间间隔应为多少秒?

(3) 写出取样信号 $x_s(t)$ 的表达式, 并用图表示。

第2章

序列的Z变换与傅里叶变换

2.1 引言

信号与系统的分析方法包括时域分析和变换域分析两种。对于连续时间信号及其系统可从时域、频域的角度进行分析。连续时间信号一般用连续变量时间 t 的函数表示,系统用微分方程描述。为了在频率域进行分析,可以用拉普拉斯变换与傅里叶变换的方法将时间域函数转换到频率域。其中,傅里叶变换用于进行频域分析,而拉普拉斯变换作为傅里叶变换的推广,用来对信号进行复频域分析。

与之类似,离散时间信号也具有时间特性、频率特性。离散时间信号用序列表示,自变量仅取整数,非整数时无定义,系统用差分方程描述。相应地,频域分析方法采用 Z 变换与傅里叶变换作为数学工具。其中,傅里叶变换用于对信号进行频域分析,而用 Z 变换对信号进行复频域分析。 Z 变换在离散时间系统中的作用就如同拉普拉斯变换在连续时间系统中的作用一样,它把描述离散时间系统的差分方程转化为简单的代数方程,大大简化了解过程。

本章学习序列的 Z 变换和傅里叶变换以及 Z 变换和傅里叶变换的主要性质,有关利用 Z 变换分析系统和信号的频域特征内容将在第3章讨论。

2.2 序列的 Z 变换

2.2.1 Z 变换及其收敛域的定义

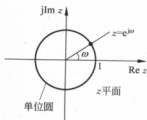


图 2.1 z 平面

序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

式中: z 为一个连续复变量,具有实部和虚部,所在的复平面称为 z 平面,如图 2.1 所示。式(2.1)中对 n 求和是由 $-\infty$ 到 $+\infty$,故称为双边 Z 变换。而单边 Z 变换定义为

$$X_1(z) = \mathcal{Z}_1[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.2)$$

单边 Z 变换对 n 求和是由 0 到 $+\infty$ 。显然,单边 Z 变换只是对因果序列进行 Z 变换。对于因果序列,单边 Z 变换与双边 Z 变换结果相同。因此,可以把单边 Z 变换看成因果序列情况下的双边 Z 变换。

Z 变换是以 z 为变量的无穷项幂级数,该罗朗级数在收敛域内的每一点上都是解析函数,因此在收敛域内的 Z 变换也是解析函数,Z 变换及其所有导数必为 z 的连续函数。

变量 z 也可以用极坐标形式表示,即

$$z = |z|e^{j\omega}$$

式中: ω 为数字频率。在 z 平面上 $|z|=1$ 为半径的圆称为单位圆,单位圆上的参数可用 $z=e^{j\omega}$ 表示。

例 2.1 求序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的 Z 变换。

解 序列 $a^n u(n)$ 是一个因果序列,根据 Z 变换的定义

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \\ &= 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + (az^{-1})^3 + \cdots \end{aligned}$$

这是一个 az^{-1} 的无穷项幂级数。显然,当 $|az^{-1}| \geq 1$ 时级数发散,而只有当 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时级数收敛, $X(z)$ 才有有限值,或者说 $X(z)$ 才存在。这时无穷级数 $X(z)$ 可用封闭形式,即其解析函数形式表示为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

这说明序列 $a^n u(n)$ 的 Z 变换只在 z 平面的一定区域内收敛,区域 $|z| > |a|$ 就是其 Z 变换的收敛区域。对于给定的任意序列 $x(n)$,使其 Z 变换收敛的所有 z 值的集合组成的区域称为 Z 变换 $X(z)$ 的收敛域。

根据级数理论,式(2.1)的级数收敛的充分必要条件是满足绝对可和条件,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| < +\infty \quad (2.3)$$

要满足式(2.3)的不等式, $|z|$ 值必须在一定的范围内,这个范围就是收敛域。根据罗朗级数的性质, Z 变换的收敛域一般是某个环域,即

$$R_{z-} < |z| < R_{z+}$$

式中:收敛半径 R_{z-} 可以小到 0; R_{z+} 可以大到 ∞ 。

收敛域就是以原点为中心,以 R_{z-} 和 R_{z+} 为半径的圆所围成的环域,如图 2.2 所示。图中用阴影区域表示收敛域。

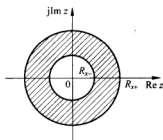


图 2.2 Z 变换的收敛域

2.2.2 几种序列的 Z 变换及其收敛域

序列 $x(n)$ 的性质决定了 $X(z)$ 的收敛域。不同形式的序列其收敛域不同,下面分别讨论几种序列的 Z 变换及其收敛域。

1. 有限长序列

有限长序列只在有限区间 $n_1 \leq n \leq n_2$ 内具有非零的有限值,在此区间外序列值都为零,其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (2.4)$$

$X(z)$ 是有限项级数之和,在有限区间 $n_1 \leq n \leq n_2$ 内只要级数的每一项都有界,则有限项的和有界,级数就收敛。因此,要求

$$|x(n)z^{-n}| < +\infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

由于 $x(n)$ 有界,故要求

$$|z^{-n}| < +\infty, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

显然,在除 $z=0$ 及 $z=\infty$ 外的整个开域 $(0, \infty)$ 都满足此条件。也就是说,有限长序列的 Z 变换的收敛域至少是 $0 < |z| < +\infty$ 的有限 z 平面,如图 2.3 所示。

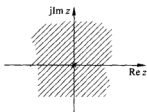


图 2.3 有限长序列 Z 变换的收敛域

实际上, $z=0$ 及 $z=\infty$ 两点是否也收敛与 n_1, n_2 取值情况有关。具体来说,当 $n_1 \geq 0$ 时,级数(2.4)中没有正幂项,因而 $|z| = +\infty$ 时级数收敛, $|z| = 0$ 时级数发散,此时收敛域为 $0 < |z| \leq +\infty$; 当 $n_2 \leq 0$ 时,级数式(2.4)中有正幂项,因而

$|z| = +\infty$ 时级数发散, $|z| = 0$ 时级数收敛,此时收敛域为 $0 \leq |z| < +\infty$ 。

例 2.2 求序列 $x(n) = a^n R_N(n)$ 的 Z 变换。

解 根据 Z 变换的定义

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}}$$

假设 $|a|$ 是有限值,且 $|a| < 1$ 。 $X(z)$ 有一个 $z=a$ 的极点,但也有一个 $z=a$ 的零点,将零极点对消。收敛域为 $0 < |z| \leq +\infty$ 。

2. 右边序列

右边序列只在有限区间 $n \geq n_1$ 时具有非零的有限值,在 $n < n_1$ 时序列值都为零,其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.5)$$

其收敛域可分为因果序列和非因果序列两种情况分析。设级数(2.5)在某个圆 $|z| = |z_1|$ 上绝对收敛,即

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} |x(n)z_1^{-n}| < +\infty$$

假定 z 是圆外任意一点,即 $|z| > |z_1|$,则有

(1) 当 $n_1 \geq 0$ 时,序列称为因果序列,是右边序列中最重要的一种序列。有

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| < \sum_{n=n_1}^{+\infty} |x(n)z_1^{-n}| < +\infty$$

显然, $\sum_{n=-n_1}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ 是收敛的。由于级数中没有正幂项, $|z| = +\infty$ 时级数收敛, 因此, 因果序列 Z 变换的收敛域包括 ∞ , 即为 $R_{x-} < |z| \leq +\infty$, 如图 2.4 所示。

(2) 当 $n_1 < 0$ 时, 此右边序列称为非因果序列。有

$$\sum_{n=-n_1}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-n_1}^{-1} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)z^{-n}|$$

显然, 当 z 取有限值时, 级数 $\sum_{n=-n_1}^{-1} |x(n)z^{-n}|$ 的值是有限的, 而级

数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)z^{-n}|$ 是收敛的。所以, 级数 (2.5) 的收敛域是以 R_{x-} 为半径的圆的外部区域, 即 $R_{x-} < |z| < +\infty$, 如图 2.4 所示。

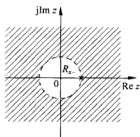


图 2.4 右边序列 Z 变换的收敛域

3. 左边序列

左边序列只在有限区间 $n \leq n_2$ 时具有非零的有限值, 在 $n > n_2$ 时序列值都为零, 其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (2.6)$$

其收敛域可分为逆因果序列和非因果序列两种情况分析。设级数 (2.6) 在某个圆 $|z| = |z_2|$ 上绝对收敛, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z_2^{-n}| < +\infty$$

假定 z 是圆内任意一点, 即 $|z| < |z_2|$, 则有

(1) 当 $n_2 \leq 0$ 时, 序列称为逆因果序列。有

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z^{-n}| < \sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z_2^{-n}| < +\infty$$

显然, $\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$ 是收敛的。由于级数中没有负幂项, $|z| = 0$ 时级数收敛, 因此, 逆因果序列 Z 变换的收敛域包括 0 点, 即为 $0 \leq |z| < R_{x+}$, 如图 2.5 所示。

(2) 当 $n_2 > 0$ 时, 此左边序列称为非因果序列。有

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=0}^{n_2} |x(n)z^{-n}|$$

显然, 当 z 取除 0 外的有限值时, 级数 $\sum_{n=0}^{n_2} |x(n)z^{-n}|$ 的值是有限的, 而级数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)z^{-n}|$ 是收敛的。所以, 级数 (2.6) 的收敛域是以 R_{x+} 为半径的圆的内部区域, 即 $0 < |z| < R_{x+}$ 。

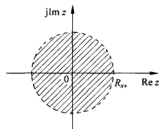


图 2.5 左边序列 Z 变换的收敛域

例 2.3 求序列 $x(n) = a^{-n}u(-n-1)$ 的 Z 变换。

$$\text{解 } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (az)^n = az(1 + az + a^2 z^2 + \cdots)$$

当 $|az| < 1$, 即 $|z| < 1/|a|$ 时, 级数收敛。这时 $X(z)$ 可用封闭形式表示为

$$X(z) = \frac{az}{1 - az}, \quad |z| < 1/|a|$$

$X(z)$ 有一个 $z=1/a$ 的极点, 但也有一个 $z=0$ 的零点, 如图 2.6 所示。图中用 \times 表示极点, 用 \circ 表示零点。

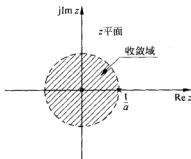


图 2.6 例 2.3 Z 变换的收敛域

4. 双边序列

双边序列是指 n 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 都具有非零的有限值, 可看成一个右边序列和一个左边序列的和, 其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.7)$$

式(2.7)中右边第一项为左边序列, 其收敛域为 $0 < |z| < R_{x+}$; 第二项为右边序列, 其收敛域为 $R_{x-} < |z| < +\infty$ 。因而双边序列 Z 变换的收敛域是两个序列 Z 变换的收敛域的公共部分。如果满足 $R_{x-} < R_{x+}$, 则 $X(z)$ 的收敛域为环状区域, 即 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 如图 2.7 所示; 如果满足 $R_{x-} \geq R_{x+}$, 则 $X(z)$ 无收敛域。

例 2.4 已知序列

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases}$$

如果 $0 < a < b$, 求其 Z 变换及其收敛域。

解 这是一个双边序列, 其 Z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} \end{aligned}$$

从有理分式 $X(z)$ 可以看出, 极点为 $z_1=a$ 和 $z_2=b$, 零点为 $z_1=0$ 和 $z_2=(a+b)/2$, 收敛域为环域 $a < |z| < b$, 如图 2.8 所示。

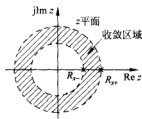
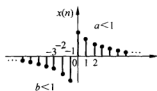
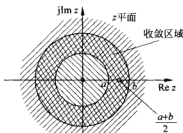


图 2.7 双边序列 Z 变换的收敛域



(a)



(b)

图 2.8 例 2.4 Z 变换的收敛域

2.2.3 逆Z变换

逆Z变换是由 $X(z)$ 及其收敛域求序列 $x(n)$ 的变换,定义为 $x(n)=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$ 。求逆Z变换的方法通常有三种:幂级数法(长除法)、部分分式展开法和围线积分法。

1. 幂级数法(长除法)

由Z变换的定义可知, $X(z)$ 是复变量 z^{-1} 的幂级数,其系数是序列 $x(n)$ 的值,即

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \cdots + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \end{aligned} \quad (2.8)$$

显然,只要在给定的收敛域内,把 $X(z)$ 展开成幂级数,则级数的系数就是序列 $x(n)$ 。把 $X(z)$ 展开成幂级数的方法很多。例如,当 $X(z)$ 是 \log, \sin, \cos 等函数时,可利用幂级数公式将其展开成幂级数形式;如果 $X(z)$ 为有理分式,即分子分母都是 z 的多项式,则可直接用分子多项式除以分母多项式,即用长除法得到幂级数展开式。

例 2.5 求 $X(z)=\ln(1+az^{-1})$, $|a|<|z|$ 的逆Z变换。

解 利用 $\ln(1+x)$, 且 $|x|<1$ 的幂级数公式, 即

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad (-1 < x \leq 1) \end{aligned}$$

展开 $X(z)$ 得到

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n z^{-n}$$

由收敛域 $|a|<|z|$ 可知 $x(n)$ 应为右边序列, 因此

$$x(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n u(n)$$

可见, $X(z)$ 的闭合形式表达式加上其收敛域,才能惟一地确定序列 $x(n)$ 。在使用长除法之前,同样应根据收敛域确定对应的 $x(n)$ 是右边序列(或因果序列)还是左边序列(或逆因果序列)。如果为右边序列(或因果序列),应将 $X(z)$ 展成负幂级数,为此 $X(z)$ 的分子分母应按 z 的降幂排列;如果为左边序列(或逆因果序列),则将 $X(z)$ 展成正幂级数, $X(z)$ 的分子分母应按 z 的升幂排列。

例 2.6 求 $X(z)=\frac{3z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}$, $|z|>3$ 的逆Z变换。

解 由于收敛域是圆的外部区域,所以对应的是右边序列。当 $z \rightarrow \infty$ 时, $X(z)$ 趋近于有限值0,说明收敛域包括点 ∞ ,因此,确定是因果序列。把 $X(z)$ 的分子分母按 z 的降幂排列,有

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{1-6z^{-1}+9z^{-2}}, \quad |z|>3$$

进行长除运算

$$\begin{array}{r}
 3z^{-1} + 18z^{-2} + 81z^{-3} + 324z^{-4} + \dots \\
 1 - 6z^{-1} + 9z^{-2} \overline{) 3z^{-1}} \\
 \underline{3z^{-1} - 18z^{-2} + 27z^{-3}} \\
 18z^{-2} - 27z^{-3} \\
 \underline{18z^{-2} - 108z^{-3} + 162z^{-4}} \\
 81z^{-3} - 162z^{-4} \\
 \underline{81z^{-3} - 486z^{-4} + 729z^{-5}} \\
 324z^{-4} - 729z^{-5} \\
 \underline{324z^{-4} - 1944z^{-5} + 2916z^{-6}} \\
 1215z^{-5} - 2916z^{-6} \\
 \vdots
 \end{array}$$

所以

$$X(z) = 0 + 3z^{-1} + 2 \times 3^2 z^{-2} + 3 \times 3^3 z^{-3} + 4 \times 3^4 z^{-4} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times 3^n z^{-n}$$

由此得到

$$x(n) = n \times 3^n u(n)$$

例 2.7 求 $X(z) = \frac{3z^{-1}}{(1-3z^{-1})^2}$, $|z| < 3$ 的逆 Z 变换。

解 收敛域是圆的内部区域, 知道对应的是左边序列。X(z) 在 $z=0$ 时的值有限, 收敛域包括 0 点, 所以确定是逆因果序列。把 X(z) 的分子分母按 z 的升幂排列, 有

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{9z^{-2} - 6z^{-1} + 1}, \quad |z| < 3$$

进行长除运算

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}z + \frac{2}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^3 + \frac{4}{81}z^4 + \dots \\
 9z^{-2} - 6z^{-1} + 1 \overline{) 3z^{-1}} \\
 \underline{3z^{-1} - 2 + \frac{1}{3}z} \\
 2 - \frac{1}{3}z \\
 \underline{2 - \frac{4}{3}z + \frac{2}{9}z^2} \\
 z - \frac{2}{9}z^2 \\
 \underline{z - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{9}z^3} \\
 \frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^3 \\
 \underline{\frac{4}{9}z^2 - \frac{8}{27}z^3 + \frac{4}{81}z^4} \\
 \frac{5}{27}z^3 - \frac{4}{81}z^4 \\
 \vdots
 \end{array}$$

所以

$$X(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^3 + \frac{4}{81}z^4 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-n) \times 3^{-n} z^n$$

由此得到

$$x(n) = -n \times 3^{-n} u(-n-1)$$

2. 部分分式展开法

序列的Z变换一般是 z 的有理分式,如果 $X(z)$ 是两个实系数多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 的比,可将其展开成部分分式,然后利用表2.1的基本Z变换式求各简单分式的逆Z变换,再把各逆Z变换式相加得到 $x(n)$ 。

$X(z)$ 可以展开为

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (2.9)$$

式中: c_k 为 $X(z)$ 的非零零点; d_k 为 $X(z)$ 的非零极点。 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 的阶次分别为 M 和 N 。当 $M < N$ 且 $X(z)$ 只有一阶极点时,则 $X(z)$ 可进一步展开成

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (2.10)$$

由于 $X(z)$ 的收敛域是以最大极点的模为半径的圆的外部区域,即 $|z| > \max\{|d_k|\}$ 。根据留数定理,系数 A_k 可由式(2.11)求出,即

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k} \quad (2.11)$$

如果 $M \geq N$ 且 $X(z)$ 除有一阶极点外,在 $z=d_i$ 处还具有 s 阶极点,则 $X(z)$ 可展开成

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^i \frac{c_m}{(1 - d_i z^{-1})^m} \quad (2.12)$$

式中: B_r 可直接用长除法得到; A_k 可由式(2.11)求出。系数 c_m 由式(2.13)得到。

$$c_m = \frac{1}{(s-m)!} \left\{ \frac{d^{s-m}}{d(z^{-1})^{s-m}} [(1 - d_i z^{-1})^s X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i} \quad (2.13)$$

例2.8 用部分分式法求逆Z变换

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

解 收敛域是圆的外部区域,所以逆Z变换是右边序列。又有 $z \rightarrow \infty$ 时, $X(z)$ 趋近于有限值1,确定是因果序列。 $X(z)$ 有两个一阶极点: $z_1=2$ 和 $z_2=0.5$,将 $X(z)$ 展开成

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0.5z^{-1}}$$

利用式(2.11)求得系数为

$$A_1 = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \cdot (1 - 2z^{-1}) \Big|_{z=2} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \cdot (1 - 0.5z^{-1}) \Big|_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

查表 2.1 可得

$$x(n) = \left[\frac{4}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times 0.5^n \right] u(n)$$

例 2.9 求下列 Z 变换的逆 Z 变换

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}, \quad 2 < |z| < 3$$

解 收敛域是环状区域, 所以逆 Z 变换是双边序列。X(z) 有两个一阶极点: $z_1=2$ 和 $z_2=-3$, 将 X(z) 展开成

$$X(z) = \frac{A_1}{1-2z^{-1}} + \frac{A_2}{1+3z^{-1}}$$

利用式(2.11)求得系数为

$$A_1 = \left. \frac{5z^{-1}}{1-2z^{-1}} \right|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \left. \frac{5z^{-1}}{1+3z^{-1}} \right|_{z=-3} = -1$$

得到部分分式

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{-1}{1+3z^{-1}} = X_1(z) + X_2(z)$$

收敛条件 $|z| > 2$ 对应极点 $z_1=2$, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $X_1(z)$ 趋近于有限值 1, 收敛域包括 ∞ 点, 确定 $X_1(z)$ 对应一个因果序列 $x_1(n)$, 查表 2.1 得 $x_1(n) = 2^n u(n)$ 。收敛条件 $|z| < 3$ 对应极点 $z_2=-3$, 当 $z \rightarrow 0$ 时, $X_2(z)$ 为有限值 0, 收敛域包括 0 点, 确定 $X_2(z)$ 对应一个逆因果序列 $x_2(n)$, 查表 2.1 得 $x_2(n) = -(-3)^n u(-n-1)$ 。得到所求序列为

$$x(n) = 2^n u(n) - (-3)^n u(-n-1)$$

综合以上讨论, 部分分式法可用于右边序列和左边序列, 也同样可以应用于双边序列。但在双边序列情况下, 应注意哪些极点对应于右边序列, 哪些极点对应于左边序列。

表 2.1 几种序列的 Z 变换

序 列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	全部 z
$u(n)$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$u(-n-1)$	$-\frac{z}{z-1} = \frac{-1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$a^n u(-n-1)$	$-\frac{z}{z-a} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$R_N(n)$	$\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z > 0$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$

续表

序 列	Z 变 换	收 敛 域
$na^nu(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$na^nu(-n-1)$	$-\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$e^{-j\omega_0 n}u(n)$	$\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$	$ z > 1$
$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} = \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{z^2-z\cos\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} = \frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z > 1$
$e^{-\alpha n}\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{z^{-1}e^{-\alpha}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-\alpha}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
$e^{-\alpha n}\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}e^{-\alpha}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-\alpha}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
$\sin(n\omega_0+\theta)u(n)$	$\frac{z^2\sin\theta+z\sin(\omega_0-\theta)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} = \frac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$ z > 1$
$(n+1)a^nu(n)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2} = \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^nu(n)$	$\frac{z^3}{(z-a)^3} = \frac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$ z > a $
$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^nu(n)$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$ z > a $

3. 围线积分法

根据复变函数理论, $X(z)$ 的逆 Z 变换可利用柯西积分公式推导出来。柯西积分公式为

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

式中: c 为在 $X(z)$ 的环状解析域(即收敛域)内一条逆时针环绕原点的闭合单围线。

将 $X(z)$ 的定义式(2.1)两边同乘 z^{k-1} , 在收敛域内取一条逆时针环绕原点的积分围线, 得

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz$$

因为在收敛域内运算, 可以交换式中积分和求和的次序, 可得

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n+k-1} dz$$

利用柯西积分公式, 得

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = x(k)$$

最后推导出逆 Z 变换计算公式

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (2.14)$$

直接计算围线积分比较困难。对于有理 Z 变换, 式(2.14)的围线积分可用留数定理计算。设在有限 z 平面上, $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内部的极点集为 $\{a_k\} (k=1, 2, \dots, N)$, 在 c 外部的极点集为 $\{b_k\} (k=1, 2, \dots, M)$ 。根据柯西留数定理, 有

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \text{Res}[X(z)z^{n-1}, a_k] \quad (2.15)$$

或

$$x(n) = - \sum_{k=1}^M \text{Res}[X(z)z^{n-1}, b_k] - \text{Res}[X(z)z^{n-1}, \infty] \quad (2.16)$$

当 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 处有二阶或二阶以上的零点, 即 $X(z)z^{n-1}$ 的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高二阶或二阶以上时, 无穷远处的留数为零, 式(2.16)可表示为

$$x(n) = - \sum_{k=1}^M \text{Res}[X(z)z^{n-1}, b_k] \quad (2.17)$$

根据具体情况, 可以使用式(2.15)或式(2.17)。例如, 围线 c 内的极点一般对应于一个因果序列, 而 c 外的极点对应于一个逆因果序列, 因此, 当 $n \geq 0$ 时使用式(2.15); 当 $n < 0$ 时使用式(2.17)。

如果 $X(z)z^{n-1}$ 是 z 的有理函数, 且 $z=z_0$ 处有 s 阶极点, 即

$$X(z)z^{n-1} = \frac{P(z)}{(z-z_0)^s}$$

式中: $P(z)$ 在 $z=z_0$ 处无极点。则 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=z_0$ 处的留数可用式(2.18)计算

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_0] = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1} P(z)}{dz^{s-1}} \right]_{z=z_0} \quad (2.18)$$

特别地, 当 $s=1$ 时, 有

$$x(n) = P(z) \Big|_{z=z_0} = P(z_0) \quad (2.19)$$

例 2.10 求下列 Z 变换的逆 Z 变换

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}, \quad |z| > 1, a < 1$$

解 围线积分的被积函数为

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)}$$

当 $n \geq 0$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 的两个极点: $z_1=1$ 和 $z_2=a$ 都包含在围线 c 内, 如图 2.9 所示。使用式(2.15)和式(2.19)得

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}[X(z)z^{n-1}, 1] + \text{Res}[X(z)z^{n-1}, a] \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{a^{n+1}}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 外无极点, $X(z)z^{n-1}$ 的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高 $2-n-1=1-n \geq 2$, 使用式(2.17)得

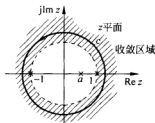


图 2.9 例 2.10 $X(z)z^{n-1}$ 的收敛域

$$x(n) = 0$$

最后得到所求序列为

$$x(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

例 2.11 求下列 Z 变换的逆 Z 变换

$$X(z) = \frac{3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

解 围线积分的被积函数为

$$X(z)z^{n-1} = \frac{5-7z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}z^{n-1} = \frac{5z-7}{(z-0.5)(z-2)}z^n$$

根据 $X(z)$ 的收敛域求序列 $x(n)$ 。收敛域总是以极点为界, $X(z)$ 的极点是 $z_1=0.5$, $z_2=2$, 所以收敛域有 $|z|<0.5$, $0.5<|z|<2$ 和 $|z|>2$ 三种情况, 分别对应三种不同的原序列。

(1) $|z|<0.5$: 当 $n \geq 0$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内无极点, 使用式(2.15)得 $x(n)=0$ 。当 $n < 0$ 时, 围线 c 内有 n 阶极点 $z_n=0$, c 外有一阶极点 $z_1=0.5$, $z_2=2$; 而且 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 处有二阶或二阶以上的零点, 改求 c 外极点的留数, 使用式(2.16)和式(2.17)得

$$\begin{aligned} x(n) &= -\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 0.5] - \operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 2] \\ &= -\left. \frac{(5z-7)z^n}{z-2} \right|_{z=0.5} - \left. \frac{(5z-7)z^n}{z-0.5} \right|_{z=2} \\ &= -3 \times 0.5^n - 2 \times 2^n \end{aligned}$$

于是

$$x(n) = -(3 \times 0.5^n + 2 \times 2^n)u(-n-1)$$

(2) $0.5 < |z| < 2$: 当 $n \geq 0$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内有一阶极点: $z_1=0.5$, 使用式(2.15)得

$$x(n) = \operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 0.5] = \left. \frac{(5z-7)z^n}{z-2} \right|_{z=0.5} = 3 \times 0.5^n$$

当 $n < 0$ 时, 围线 c 内有一阶极点 $z_1=0.5$ 和 n 阶极点 $z_n=0$, c 外有一阶极点 $z_2=2$; 而且 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 处有二阶或二阶以上的零点, 改求 c 外极点 z_2 的留数, 使用式(2.17)得

$$x(n) = -\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 2] = -\left. \frac{(5z-7)z^n}{z-0.5} \right|_{z=2} = -2 \times 2^n$$

于是

$$x(n) = 3 \times 0.5^n u(n) - 2 \times 2^n u(-n-1)$$

(3) $|z| > 2$: 当 $n \geq 0$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 在 c 内有一阶极点 $z_1=0.5$, $z_2=2$, 由式(2.15)得

$$x(n) = \operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 0.5] + \operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}, 2] = 3 \times 0.5^n - 2 \times 2^n$$

当 $n < 0$ 时, 围线 c 内无极点, 而且根据收敛域判断这是一个因果序列, 因此, $x(n)=0$ 。

于是

$$x(n) = (3 \times 0.5^n - 2 \times 2^n)u(n)$$

2.2.4 Z 变换的性质和定理

1. 线性

Z 变换是一种线性变换,满足叠加原理。即若

$$\begin{aligned} Z[x(n)] &= X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Z[y(n)] &= Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+} \end{aligned}$$

则

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad R_- < |z| < R_+ \quad (2.20)$$

式中: a, b 为任意常数。相加后 Z 变换的收敛域为两个序列收敛域的公共区域,即

$$R_- = \max(R_{x-}, R_{y-}), \quad R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

通常,收敛域的范围变小。但是线性组合中如果出现新的零点抵消原来极点的情况,则收敛域可能增大。

例 2.12 求序列 $x(n) = u(n) - u(n-3)$ 的 Z 变换。

解 由表 2.1 可知

$$Z[u(n)] = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

且

$$Z[u(n-3)] = \sum_{n=3}^{+\infty} z^{-n} = \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{z-1}, \quad |z| > 1$$

所以

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(n)] = Z[u(n)] - Z[u(n-3)] \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-2}}{z-1} = \frac{z^3 + z + 1}{z^2} \end{aligned}$$

由于出现零极点抵消的情况,可以看出收敛域增大了。实际上,由于 $x(n)$ 是 $n \geq 0$ 的有限长序列,收敛域是除了 $|z|=0$ 之外的全部 z 平面。

2. 序列的移位

若 $Z[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 则

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.21)$$

证明 由 Z 变换的定义,有

$$Z[x(n-m)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m)z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} = z^{-m}X(z)$$

从式(2.20)可见序列移位后,收敛域是相同的,只对单边序列在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处可能有例外;而对双边序列,其收敛域是环状区域,序列移位后 Z 变换的收敛域不会变化。例如, $\delta(n)$ 的 Z 变换在 z 平面处处收敛;而 $\delta(n-1)$ 的 Z 变换为 z^{-1} , 在 $z=0$ 处不收敛; $\delta(n+1)$ 的 Z 变换为 z , 在 $z=\infty$ 处不收敛。

3. 乘以指数序列

若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 则

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+} \quad (2.22)$$

序列乘以指数序列 a^n 也称为 z 域尺度变换, a 是实常数, 也可以是复数。

证明 由 Z 变换的定义, 有

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

收敛域为 $R_{x-} < |a^{-1}||z| < R_{x+}$, 即 $|a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$ 。

序列乘以指数序列 a^n 可使 Z 变换的零极点的位置移动。如果 $X(z)$ 在 $z=z_1$ 处有极点, 则 $X(a^{-1}z)$ 在 $z=az_1$ 处有极点。也就是说, 如果 a 是正实数, 表示 z 平面尺度的缩小或扩大, 则零极点在 z 平面上沿径向移动; 如果 a 是模为 1 的复数, 相当于在 z 平面上旋转, 即零极点位置沿着以原点为圆心、 $|z_1|$ 为半径的圆周移动; 若 a 是任意复数, 则零极点在 z 平面上既沿径向移动, 又有角度旋转。

4. 序列的线性加权

序列的线性加权也称为 z 域求导数。若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 则

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.23)$$

证明 将 $X(z)$ 的定义式(2.1)两边对 z 取导数, 并同乘以 $-z$, 得

$$\begin{aligned} -z \frac{d}{dz} X(z) &= -z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n) x(n) z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n) z^{-n} = \mathcal{Z}[nx(n)] \end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

5. 序列的折叠

若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 则

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}), \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1} \quad (2.24)$$

证明 由 Z 变换的定义, 有

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$$

收敛域为 $R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+}$, 即 $R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$ 。

6. 序列的复共轭

一个复序列 $x(n)$ 的共轭序列为 $x^*(n)$, 若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 则

$$\mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.25)$$

证明 由 Z 变换的定义,有

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^* \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^* = X^*(z^*), R_{x-} < |z| < R_{x+} \end{aligned}$$

7. 初值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 即 $x(n)=0, n<0$, 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (2.26)$$

证明 由于 $x(n)$ 是因果序列, 有

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(n)z^{-n} + \cdots$$

显然

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

若 $x(n)$ 是逆因果序列, 即 $x(n)=0, n>0$, 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) \quad (2.27)$$

8. 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 且 $X(z)$ 的全部极点, 除在 $z=1$ 处可以有一阶极点外, 其余极点都在单位圆内, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (2.28)$$

证明 利用序列的移位性质可得

$$(z-1)X(z) = zX(z) - X(z)$$

$$= \mathcal{Z}[x(n+1) - x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)] z^{-n}$$

$x(n)$ 是因果序列, 所以

$$(z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)] z^{-k} \quad (2.29)$$

由于 $X(z)$ 在单位圆上只可能有一阶极点, $(z-1)X(z)$ 中因子 $(z-1)$ 将抵消 $z=1$ 处可能的极点, 因此, $(z-1)X(z)$ 的收敛域将包括单位圆, 即在 $1 \leq |z| \leq +\infty$ 上都收敛。因而允许对式 (2.29) 取 $z \rightarrow 1$ 的极限, 即

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ [x(0) - 0] + [x(1) - x(0)] + \cdots + [x(n+1) - x(n)] \} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ x(n+1) \} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) \end{aligned}$$

由于 $\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$ 是 $X(z)$ 在 $z=1$ 处的留数, 因此, 终值定理可用 $X(z)$ 在 $z=1$ 极点上的留数表示, 即

$$x(+\infty) = \text{Res}[X(z)]_{z=\infty}$$

如果 $X(z)$ 在单位圆上无极点, 则 $x(+\infty)=0$ 。

9. 序列的卷积

两个时域序列卷积的 Z 变换等于各自 Z 变换的乘积, 也称为时域卷积定理。

若 $w(n)=x(n)*y(n)$, 则

$$W(z) = \mathcal{Z}[x(n)*y(n)] = X(z) \cdot Y(z), \quad R_- < |z| < R_+ \quad (2.30)$$

证明 由 Z 变换的定义, 有

$$W(z) = \mathcal{Z}[x(n)*y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \right] z^{-n}$$

交换求和次序, 并代入 $m=n-k$ 得

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m} = X(z) \cdot Y(z) \end{aligned}$$

$W(z)$ 的收敛域是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 收敛域的公共区域, 即

$$R_- = \max(R_{x-}, R_{y-}), \quad R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

所以在一般情况下收敛域变小。但是, 如果一个 Z 变换收敛域边界上的极点与另一个 Z 变换的零点可互相抵消, 则收敛域有可能增大。

前面讨论过, 在线性时不变系统中, 如果输入为 $x(n)$, 系统单位脉冲响应为 $h(n)$, 则输出 $y(n)$ 是 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和。利用卷积定理, 可以通过求 $X(z) \cdot Y(z)$ 的反变换求出 $y(n)$ 。对于有限长序列, 这样求解会更加方便一些, 因而这个性质得到了广泛应用。

例 2.13 求序列 $x(n)=a^n u(n)$, $h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$, 求 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

解 查表 2.1, 得

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}} = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$X(z)$ 和 $H(z)$ 的收敛域分别为 $|z|>a$ 和 $|z|>b$, 所以

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{z}{z-b}, \quad |z|>b$$

由收敛域知对应的 $y(n)$ 是一个因果序列, 于是

$$y(n) = x(n)*h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = b^n u(n)$$

显然, 在 $z=a$ 处, $X(z)$ 的极点被 $H(z)$ 的零点所抵消, 如果 $|b|<|a|$, 则 $Y(z)$ 的收敛域比 $X(z)$ 与 $H(z)$ 收敛域的重叠部分要大, 如图 2.10 所示。

10. 序列的乘积

两个时域序列乘积的 Z 变换等于各自 Z 变换的复卷积, 也称为 z 域复卷积定理。

若 $w(n)=x(n) \cdot y(n)$, 则

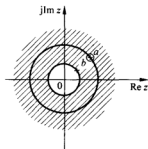


图 2.10 例 2.13 的零极点及其收敛域

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y(zv^{-1}) v^{-1} dv$$

$$R_{x-} R_{y-} < |z| < R_{x+} R_{y+} \quad (2.31)$$

式中: c 是变量 v 平面上收敛域内的一条环绕原点逆时针旋转的闭合围线, 收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right]$$

证明 由逆 Z 变换计算公式(2.14), 代入 $W(z)$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \\ W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) v^{n-1} dv \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) v^{n-1} z^{-n} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) (zv^{-1})^{-n} v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y(zv^{-1}) v^{-1} dv \end{aligned}$$

可以看出, $X(v)$ 的收敛域和 $X(z)$ 的相同, $Y(zv^{-1})$ 的收敛域和 $Y(z)$ 的相同, 即

$$R_{x-} < |v| < R_{x+}, \quad R_{y-} < |zv^{-1}| < R_{y+}$$

由此得到收敛域为

$$R_{x-} R_{y-} < |z| < R_{x+} R_{y+}$$

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right]$$

式(2.31)称为复卷积公式, 可用留数定理计算, 即

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y(zv^{-1}) v^{-1} dv \\ &= \sum_k \text{Res}[X(v) Y(zv^{-1}) v^{-1}, v_k] \end{aligned} \quad (2.32)$$

这里, c 是 $X(v) Y(zv^{-1}) v^{-1}$ 在 v 平面收敛域内的闭合围线, $\{v_k\}$ 是 c 所包含的全部极点。在应用留数定理计算时正确确定围线 c 所在的收敛域是很重要的。

例 2.14 设 $x(n)=u(n)$, $y(n)=a^{|n|}$, $w(n)=x(n) \cdot y(n)$, 求 $W(z)=Z[x(n)y(n)]$ 。

解 由 Z 变换的定义并查表 2.1, 得

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad 1 < |z| \leq +\infty$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}, \quad |a| < |z| < |a|^{-1} \end{aligned}$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{(1-a^2)}{(1-av)(1-av^{-1})} \cdot \frac{1}{1-(zv^{-1})^{-1}} v^{-1} dv$$

$W(z)$ 的收敛域为 $|a| < |z| \leq +\infty$ 。被积函数 v 平面上的收敛域为 $\max(|a|, 0) < |v| < \min(|a|^{-1}, |z|)$, v 平面上的极点为 a, a^{-1} 和 z, c 内极点为 a 。应用留数定理求解, 有

$$\begin{aligned} W(z) &= \text{Res}[X(zv^{-1})Y(v)v^{-1}, a] \\ &= \left[\frac{(1-a^2)}{(1-av)(1-av^{-1})} \cdot \frac{1}{1-(zv^{-1})^{-1}v^{-1}(v-a)} \right]_{v=a} \\ &= \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |a| < |z| \leq +\infty \end{aligned}$$

11. 帕斯瓦尔定理

序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的Z变换分别为 $X(z)$ 和 $Y(z)$, 且收敛域满足 $R_{x-} R_{y-} < 1 < R_{x+} R_{y+}$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}]dv \quad (2.33)$$

式中: c 是 $X(v)Y^*(1/v^*)$ 收敛域中环绕原点逆时针旋转的闭合围线。在 v 平面的收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right]$$

证明 令 $w(n)=x(n)y^*(n)$, 由式(2.25)和复卷积分式(2.31)可得

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv, \quad R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

根据假设 $R_{x-} R_{y-} < 1 < R_{x+} R_{y+}$, $X(z)$ 和 $Y(z)$ 的公共收敛域包括单位圆, 即 $W(z)$ 在单位圆上收敛, 于是有

$$W(z)|_{z=1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv$$

而根据Z变换的定义, 有

$$W(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n)$$

所以得到

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}]dv$$

2.2.5 利用Z变换求解差分方程

一个离散时间线性时不变系统, 可用 N 阶线性常系数差分方程描述为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (2.34)$$

如果给定输入序列 $x(n)$ 及 $y(n)$ 的初始条件, 求解差分方程就是要得到序列 $y(n)$ 的闭合表达式。在第1章中介绍了时域求解线性常系数差分方程的方法, 本节讨论Z变换求解方法。利用Z变换求解差分方程是基于Z变换的移位性质, 将差分方程转换成代数方程, 使得求解过程简单易行。

根据输入序列 $x(n)$ 加到系统输入端的时间不同,可以分为几种情况讨论。

(1) 如果输入序列 $x(n)$ 是在 $n=0$ 时刻以前加到系统输入端,而且系统已经处于稳态状态。此时解差分方程求出序列 $y(n)$ 可得到系统的稳态解。对差分方程(2.34)求 Z 变换

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r}$$

设

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.35)$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) = H(z) X(z)$$

利用逆 Z 变换,得

$$y(n) = Z^{-1}[H(z)X(z)]$$

(2) 如果输入序列 $x(n)$ 是在 $n=0$ 时刻加到系统输入端,即输入序列 $x(n)$ 在 $n < 0$ 时为零。因为 $x(n)$ 是因果序列,单边 Z 变换与双边 Z 变换是一样的。但是对于输出序列 $y(n)$,移位序列的单边 Z 变换与双边 Z 变换不一样。

求移位序列 $y(n-m)$ 的单边 Z 变换,即

$$\begin{aligned} Z[y(n-m)u(n)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} y(n-m)z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} y(n-m)z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{k=-m}^{+\infty} y(k)z^{-k} \\ &= z^{-m} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} y(k)z^{-k} + \sum_{k=-m}^{-1} y(k)z^{-k} \right] \\ &= z^{-m} \left[Y(z) + \sum_{k=-m}^{-1} y(k)z^{-k} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

对差分方程(2.34)进行单边 Z 变换,得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} [Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] &= \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r} \\ Y(z) &= Y_1(z) + Y_2(z) \\ &= - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} + \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) \end{aligned} \quad (2.37)$$

式(2.37)中, $Y_1(z)$ 对应系统的零输入解 $y_1(n)$, 是由 $y(n)$ 的初始条件引起的; $Y_2(z)$ 对应系统的零状态解 $y_2(n)$, $y_2(n)$ 是完全由输入序列 $x(n)$ 所引起的输出。系统的完整输出是零输入解和零状态解之和, 即 $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ 。可见, 求零状态解时可用单边 Z 变换或双边 Z 变换, 但求零输入解时, 由于需要考虑初始条件, 必须用单边 Z 变换。

例 2.15 已知一个线性时不变系统的差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, 设初始条件 $y(-1) = 2$, 输入 $x(n) = b^n u(n)$ 时系统的输出序列。

解 直接对差分方程作 Z 变换, 得

$$Y(z) = az^{-1}[Y(z) + y(-1)z] + X(z)$$

$$Y(z) = \frac{2a + X(z)}{1 - az^{-1}}$$

对输入 $x(n) = b^n u(n)$ 求 Z 变换, 得 $X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, |z| > |b|$ 。代入上式得

$$Y(z) = \frac{2a}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

收敛域为 $|z| > \max(|a|, |b|)$, 于是

$$y(n) = 2a^{n+1} + \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

根据前面的分析, 零输入解 $y_1(n)$ 和零状态解 $y_2(n)$ 分别为

$$y_1(n) = 2a^{n+1}, \quad y_2(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

2.3 序列的傅里叶变换

前一节研究了离散时间信号的复频域即 Z 域分析, 本节研究离散时间信号的实频域分析, 即离散时间信号的傅里叶变换。

2.3.1 序列傅里叶变换的定义

序列 $x(n)$ 及其频谱之间的关系, 可用序列的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.38)$$

而 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶逆变换定义为

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.39)$$

由序列 Z 变换的定义式(2.1), 很容易得到

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

与式(2.38)比较可见, 序列的傅里叶变换在数值上等于它在 z 平面单位圆上取值的 Z 变换。如果把序列 $x(n)$ 在 z 平面单位圆上的变换定义为序列 $x(n)$ 的傅里叶变换, 则定义式为

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)] = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.40)$$

根据逆 Z 变换计算公式(2.14), 并将积分围线 c 取在单位圆上, 即 $z = e^{j\omega}$, 可得到序列 $x(n)$ 的傅里叶逆变换式

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.41)$$

通常把式(2.38)和式(2.39)合称为傅里叶变换对。在物理意义上, $X(e^{j\omega})$ 表示序列 $x(n)$ 的频谱, ω 是数字域角频率。一般情况下, $X(e^{j\omega})$ 是复数, 可表示为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (2.42)$$

式(2.42)中, $X_R(e^{j\omega})$ 和 $X_I(e^{j\omega})$ 分别是 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部。也可用幅度和相位表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.43)$$

式(2.43)中, 模 $|X(e^{j\omega})|$ 和相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 分别称为 $X(e^{j\omega})$ 的幅度特性和相位特性。

$$X(\omega) = |X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})} \quad (2.44)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] = \arg \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \quad (2.45)$$

例 2.16 求序列 $x(n]=R_N(n)$ 的傅里叶变换。

解 由序列的傅里叶变换定义, 得

$$\begin{aligned} R_N(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin \omega N}{\sin \omega/2} \\ |R_N(e^{j\omega})| &= \frac{\sin \omega N}{\sin \omega/2} \\ \arg[R_N(e^{j\omega})] &= -\omega(N-1)/2 \end{aligned}$$

图 2.11 中画出了 $N=5$ 时 $X(e^{j\omega})$ 的模 $|R_5(e^{j\omega})|$ 和相位 $\arg[R_5(e^{j\omega})]$ 的曲线。

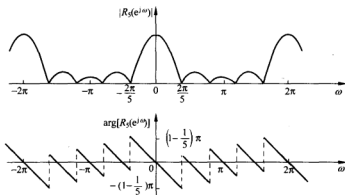


图 2.11 $R_5(n)$ 傅里叶变换的幅度和相位

序列的傅里叶变换具有以下两个特点:

(1) $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续周期函数, 周期为 2π 。由于 $e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}$, 从式(2.38)序列的傅里叶变换定义可得出 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$ 。

(2) 当 $x(n)$ 为实序列时, $X(e^{j\omega})$ 的幅度 $|X(e^{j\omega})|$ 在区间 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 内是偶对称函数, 相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是奇对称函数。从图 2.11 中可以看出这一特点。

事实上, 序列傅里叶变换的定义式(2.38)是周期函数 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数展开式, 而

$x(n)$ 是傅里叶级数的系数。值得注意的是,式(2.38)右边的级数并不总是收敛的,或者说并不是任何序列 $x(n)$ 的傅里叶变换都是存在的。只有当序列 $x(n)$ 满足绝对可和条件,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < +\infty \quad (2.46)$$

时,式(2.38)中的级数才是绝对收敛的,即序列 $x(n)$ 的傅里叶变换才存在。式(2.46)只是序列 $x(n)$ 的傅里叶变换存在的充分条件。例如,一般认为序列 $u(n)$ 、 a^n 和 $e^{j\omega n}$ 的傅里叶变换不存在,因为这一类序列都不是绝对可和的。但是,在引入奇异序列的概念后,这类不是绝对可和的序列也存在傅里叶变换。

2.3.2 序列傅里叶变换的性质

序列的傅里叶变换是 z 平面单位圆上的 Z 变换,如果序列 Z 变换的收敛域包含单位圆,则对应的傅里叶变换就存在。因此,傅里叶变换的特性与 Z 变换的特性基本上是一样的,但也有其特别之处。这些性质对于序列和系统进行频域分析是很重要的。

1. 线性

设 $X_1(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x_2(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (2.47)$$

式中: a, b 为常数。

2. 序列的移位

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[x(n-k)] = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \quad (2.48)$$

3. 序列的调制

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (2.49)$$

4. 序列乘以 n

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[nx(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (2.50)$$

5. 序列的折叠

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) \quad (2.51)$$

6. 序列的复共轭

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\mathcal{F}[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.52)$$

$$\mathcal{F}[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega}) \quad (2.53)$$

7. 序列的卷积

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[y(n)]$, $w(n) = x(n) * y(n)$, 则

$$W(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n) * y(n)] = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) \quad (2.54)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) * y(n)] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

令 $n-k=m$, 得

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) e^{-j\omega m} = X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

8. 序列的乘积

设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[y(n)]$, $w(n) = x(n) \cdot y(n)$, 则

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}[x(n) \cdot y(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) * Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

证明

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}[x(n) \cdot y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) y(n)] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \cdot y(n) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) e^{-j(\omega-\theta)n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

9. 帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.56)$$

证明 设 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

帕斯瓦尔定理也称为能量守恒定理,表明信号在时域的总能量等于其频域的总能量。

10. 序列傅里叶变换的对称性

任何序列 $x(n)$ 总能表示为一个共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ 之和,即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2.57)$$

式中: 序列 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 定义为

$$x_e(n) = x_e^*(-n), \quad x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (2.58)$$

序列 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 与 $x(n)$ 的关系可以表示为

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (2.59)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \quad (2.60)$$

如果 $x(n)$ 为实序列,则共轭对称序列 $x_e(n)$ 为偶序列,而共轭反对称序列 $x_o(n)$ 为奇序列。由式(2.57)可知,实序列可表示成偶序列和奇序列之和。

同理,任何序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可以分解成共轭对称分量与共轭反对称分量两部分之和,即

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (2.61)$$

式中: $X_e(e^{j\omega})$ 和 $X_o(e^{j\omega})$ 分别是共轭对称分量和共轭反对称分量,即满足

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}), \quad X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \quad (2.62)$$

而且

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.63)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.64)$$

与序列 $x(n)$ 的情况一样,若傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是共轭对称的实函数,则它是频率的偶函数,即 $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ 。若 $X(e^{j\omega})$ 是共轭反对称的实函数,则它是频率的奇函数,即 $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$ 。

设复序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。根据序列傅里叶变换的复共轭性质,即式(2.52)和式(2.53)可以得到 $x(n)$ 的实部 $\text{Re}[x(n)]$ 和虚部 $\text{Im}[x(n)]$ 的傅里叶变换分别为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\text{Re}[x(n)]] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]\right] \\
 &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})
 \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\operatorname{Im}[x(n)]] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]\right] \\ &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})\end{aligned}\quad (2.66)$$

序列的共轭对称分量 $X_e(e^{j\omega})$ 和共轭反对称分量 $X_o(e^{j\omega})$ 的傅里叶变换分别为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_e(n)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]\right] \\ &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}\quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_o(n)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]\right] \\ &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}\quad (2.68)$$

当 $x(n)$ 是实序列时, 对称性质特别简单和有用。实序列的傅里叶变换满足共轭对称性, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.69)$$

$$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})] \quad (2.70)$$

$$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad (2.71)$$

所以, 实序列的傅里叶变换的实部是 ω 的偶函数, 而虚部是 ω 的奇函数。

如果将 $X(e^{j\omega})$ 用极坐标表示,

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

则 $|X(e^{j\omega})|$ 是 ω 的偶函数, $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是 ω 的奇函数, 即

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (2.72)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \quad (2.73)$$

表 2.2 列出了序列傅里叶变换的一些对称性质。

表 2.2 序列傅里叶变换的对称性质

序列 $x(n)$		傅里叶变换
复序列	$\operatorname{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$
	$\operatorname{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$
	$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]$
	$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$
实序列		$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
		$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})]$
		$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})]$
		$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
		$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$
	$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$	$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]$
	$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$	$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$

2.3.3 周期序列的傅里叶级数表示

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \quad k \text{ 为任意整数}$$

周期序列不是绝对可和的, 在任何 z 值下, 其 Z 变换都不收敛, 即不满足绝对可和条件式(2.3)。但是, 同连续时间周期信号一样, 周期序列可用离散傅里叶级数来表示, 也就是用复指数序列的加权和表示

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.74)$$

式中: a_k 是傅里叶级数的系数。基频序列 $e_1(n)$ 和 k 次谐波序列 $e_k(n)$ 分别为

$$e_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}, \quad e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

离散傅里叶级数与连续傅里叶级数的表现形式是相同的, 但是连续傅里叶级数有无穷多个谐波分量, 而离散傅里叶级数的谐波分量只有 N 个, 而且是独立的, 这是因为复指数序列是 k 的周期函数的缘故, 即

$$e_{k+mN}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e_k(n)$$

因此, 对离散傅里叶级数, 只取 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 个独立谐波分量就足以表示原来的信号。因而 $\tilde{x}(n)$ 可展开成如下的离散傅里叶级数, 即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.75)$$

式(2.75)中, 乘上系数 $1/N$ 是为了下面计算 $\tilde{X}(k)$ 时方便, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。为了从周期序列 $\tilde{x}(n)$ 得到系数 $\tilde{X}(k)$, 将式(2.75)两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 然后从 $n=0$ 到 $N-1$ 的一个周期内求和, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k=r \\ 0, & k \neq r \end{cases}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \tilde{X}(r)$$

把 r 换成 k 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.76)$$

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 则得到周期序列的离散傅里叶级数(DFS)变换对

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad -\infty < k < +\infty \quad (2.77)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{kn} \quad -\infty < k < +\infty \quad (2.78)$$

式中: n 和 k 都为离散变量。如果将 n 当作时间变量, k 当作频率变量, 则 $\text{DFS}[\cdot]$ 表示时域到频域的变换, 称为傅里叶级数正变换, $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示由频域到时域的变换, 称为傅里叶级数反变换。

式(2.78)表示将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 分解成 N 个谐波分量, 谐波分量频率为 $2\pi k/N$, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 幅度为 $\tilde{X}(k)/N$ 。其中基波分量频率为 $2\pi/N$, 幅度为 $\frac{1}{N}\tilde{x}(0)$ 。

$\tilde{X}(k)$ 也是周期为 N 的周期序列, 即

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

图 2.12 所示的是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 及其傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的图形。可以看出, 时域周期序列的离散傅里叶级数在频域也是一个周期序列。

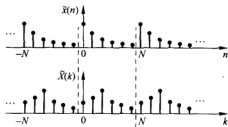


图 2.12 周期序列及其傅里叶级数示意图

一个周期序列虽然是无限长的, 但是只要知道它的一个周期, 整个周期序列的信息也就知道了。因此, 周期序列的信息可以用它在一个周期中的 N 个值来代表, 式(2.77)与式(2.78)中都只取 N 个序列值就说明了这一点。因而周期序列与有限长序列之间有着本质的联系。

例 2.17 设 $\tilde{x}(n) = \{\dots, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 是一个以 $N=4$ 为周期的周期序列, 求 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数。

解 周期序列的 $N=4$, 所以 $W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$, 于是

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{4-1} \tilde{x}(n) W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 (-j)^{kn} \tilde{x}(n), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

所以有

$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) = \tilde{x}(0) + \tilde{x}(1) + \tilde{x}(2) + \tilde{x}(3) = 6$$

$$\tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^3 (-j)^n \tilde{x}(n) = \tilde{x}(0) - j\tilde{x}(1) - \tilde{x}(2) + j\tilde{x}(3) = -2 + 2j$$

$$\tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^3 (-j)^{2n} \tilde{x}(n) = \tilde{x}(0) - \tilde{x}(1) + \tilde{x}(2) - \tilde{x}(3) = -2$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^3 (-j)^{3n} \tilde{x}(n) = \tilde{x}(0) + j\tilde{x}(1) - \tilde{x}(2) - j\tilde{x}(3) = -2 - 2j$$

因此, $\tilde{X}(k) = \{\dots, 6, -2+2j, -2, -2-2j, 6, -2+2j, -2, -2-2j, \dots\}$ 。

2.3.4 周期序列的傅里叶变换表示

序列的傅里叶变换存在的条件是序列必须绝对可和, 周期序列不满足绝对可和条件, 因此严格讲其傅里叶变换不存在。但是前面讲过, 在引入奇异序列(单位脉冲序列)的概念后, 可以用单位脉冲序列表示周期序列的傅里叶变换。

在连续时间系统中, $x_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$, 其傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 是在 $\Omega = \Omega_0$ 处的冲激函数, 幅度为 2π , 即

$$X_a(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (2.79)$$

在离散时间系统中, $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, 其傅里叶变换的形式与式(2.79)形式一样。由于取整数, 有

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n}, \quad r \text{ 取整数}$$

因此其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) \quad (2.80)$$

式(2.80)表示复指数序列的傅里叶变换可以看作是一个脉冲串, 即为在 $\omega = \omega_0$ 处的冲激函数, 幅度为 2π , 且以 2π 为周期进行周期延拓, 如图 2.13 所示。如果式(2.80)表达的傅里叶变换成立, 则根据傅里叶逆变换定义式(2.39), 其傅里叶逆变换惟一存在且等于 $e^{j\omega_0 n}$ 。

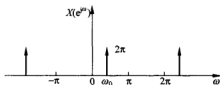


图 2.13 周期序列的傅里叶变换

在图 2.13 中, 积分区间 $[-\pi, \pi]$ 内只包括一个冲激函数, 所以

$$e^{j\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) e^{j\omega n} d\omega$$

可见式(2.80)是复指数序列的傅里叶变换。

对于一般的周期序列 $\tilde{x}(n)$, 可以展开成式(2.78)的离散傅里叶级数, $[\tilde{X}(k)/N]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 是其第 k 次谐波。根据复指数序列的傅里叶变换式(2.80), 第 k 次谐波的傅里叶变换为

$\frac{2\pi}{N} \tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$, 因此, 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[\tilde{x}(n)] = \sum_{k=-\infty}^{N-1} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$

因为 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 也是周期的, 所以周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换定义为

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad (2.81)$$

式(2.81)中, $\tilde{X}(k)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数, 可以用式(2.76)计算, 即

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

例 2.18 设 $\tilde{x}(n) = \{\dots, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ 是一个以 $N=8$ 为周期的周期序列, 求 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换。

解 如图 2.14(a) 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的波形, 周期 $N=8$, 其傅里叶变换为

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right), \quad N=8$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

参考例 2.16 的计算, 可以得到

$$\tilde{X}(k) = e^{-j\frac{7}{8}\pi k} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/8)}$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{7}{8}\pi k} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/8)} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}k\right)$$

幅频特性 $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ 如图 2.14(b) 所示。

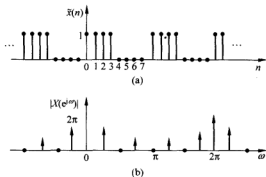


图 2.14 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 及其幅频特性

2.4 序列的 Z 变换与连续时间信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

为了了解连续时间信号 $x_a(t)$ 的拉普拉斯变换与离散时间信号 $x(n)$ 的 Z 变换之间的关系, 需要分析连续时间信号和理想取样信号拉普拉斯变换之间的关系。

在第 1 章 1.5 节中已经讨论了连续时间信号的理想取样, 理想取样输出为

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= x_a(t) \cdot p(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (2.82)$$

或

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (2.83)$$

对理想取样信号求拉普拉斯变换,得

$$\begin{aligned}\hat{X}_s(s) &= \mathcal{L}[\hat{x}_s(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_s(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) p(t) e^{-st} dt\end{aligned}\quad (2.84)$$

由于单位取样脉冲序列 $p(t)$ 是周期函数,可展开成傅里叶级数为

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t} \quad (2.85)$$

将式(2.85)代入式(2.84),改变积分与求和的次序,可得

$$\hat{X}_s(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-(s-jr\Omega_s)t} dt$$

根据拉普拉斯变换的性质,有

$$\hat{X}_s(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(s - jr\Omega_s) \quad (2.86)$$

式(2.86)表明,连续时间信号 $x_a(t)$ 经过理想取样得到的取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 的拉普拉斯变换,是连续时间信号 $x_a(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面上沿虚轴的周期延拓,即当 $\hat{X}_s(s)$ 沿平行于 $j\Omega$ 轴的路径求值时,将以 Ω_s 为周期重复出现。

$$\begin{aligned}\hat{X}_s(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) e^{-snT}\end{aligned}\quad (2.87)$$

取样序列 $x(n) = x_a(nT)$,而离散时间信号的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.88)$$

比较式(2.87)和式(2.88)可以看出

$$X(z) \big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_s(s) \quad (2.89)$$

式(2.89)表明,当 $z=e^{sT}$ 时,取样序列 $x_a(nT)$ 的 Z 变换就等于取样信号 $\hat{x}_s(t)$ 的拉普拉斯变换。这两个变换之间的关系,是由复变量 s 平面到复变量 z 平面的映射,其映射关系为

$$z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (2.90)$$

下面来讨论这一映射关系。将 s 平面用直角坐标表示,即 $s = \sigma + j\Omega$, z 平面用极坐标表示,即 $z = r_0 e^{j\omega}$,代入式(2.90)中,得到

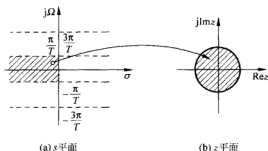
$$r_0 e^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

因此

$$r_0 = e^{\sigma T} \quad (2.91)$$

$$\omega = \Omega T \quad (2.92)$$

根据式(2.91),当 $\sigma=0$ 时,有 $r_0=1$,即 s 平面中的 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面中的单位圆;当 $\sigma<0$ 时,有 $r_0<1$,即 s 平面的左半平面映射成 z 平面的单位圆内部;当 $\sigma>0$ 时,有 $r_0>1$,即 s 平面的右半平面映射成 z 平面的单位圆外部;其映射关系如图 2.15 所示。

图 2.15 s 平面到 z 平面的映射

根据式(2.92),当 $\Omega = -\pi/T$ 时,有 $\omega = -\pi$;当 $\Omega = 0$ 时,有 $\omega = 0$;当 $\Omega = \pi/T$ 时,有 $\omega = \pi$ 。因此,当 Ω 从 $-\pi/T$ 增加到 $+\pi/T$ 时, ω 则由 $-\pi$ 增加到 $+\pi$,即辐角旋转一周,或将整个 z 平面映射一次。这样,当 Ω 再增加 $2\pi/T$ 时, ω 则又相应增加 2π ,即辐角再次旋转一周,或将整个 z 平面又映射一次。因此, s 平面上宽度为 $2\pi/T$ 的水平带映射成整个 z 平面,左半带映射成单位圆内部,右半带映射成单位圆外部,长度为 $2\pi/T$ 的虚轴映射成单位圆周。由于 s 平面可被分成无限条宽度为 $2\pi/T$ 的水平带,所以 s 平面可被映射成无限多个 z 平面,即 s 平面到 z 平面的映射是多值映射。由于这些 z 平面重叠在一起,因此,这种映射不是简单的代数映射。图 2.15 也描述了 ω 与 Ω 的关系。

将式(2.86)代入到式(2.89)中,可得 $x(z)$ 与 $x_s(s)$ 的关系为

$$X(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s(s - jr\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s\left(s - j\frac{2\pi r}{T}\right) \quad (2.93)$$

这就是说,由映射 $z=e^{sT}$ 确定的是 $x_s(s)$ 的周期延拓与 $X(z)$ 的关系,而不是 $x_s(s)$ 本身直接与 $X(z)$ 的关系。

由于傅里叶变换是拉普拉斯变换在虚轴的特例,即 $s=j\Omega$,因而映射到 z 平面上为单位圆 $z=e^{j\Omega T}$,将这两个关系式代入到式(2.89)可得

$$X(z) \big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_s(j\Omega) \quad (2.94)$$

从式(2.94)看出,取样序列在单位圆上的 Z 变换,等于其理想取样信号的傅里叶变换。

同样,将 $s=j\Omega$ 及 $z=e^{j\Omega T}$ 代入到式(2.93)可得

$$X(z) \big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s\left(j\Omega - j\frac{2\pi r}{T}\right) \quad (2.95)$$

在 1.5 节中已经讨论得知,频谱 $\hat{X}_s(j\Omega)$ 是频谱 $X_s(j\Omega)$ 的周期延拓,这一点表现在 z 平面的单位圆上就是 $X(e^{j\Omega T})$ 是 Ω 的周期函数,也就是说它在单位圆上循环出现。

在 1.2 节中已经指出,数字频率 ω 是模拟角频率 Ω 对取样频率 f_s 的归一化值。在以后的讨论中,用数字频率 ω 作为 z 平面上的单位圆的参数,即

$$z = e^{j\omega} \quad (2.96)$$

将式(2.96)代入式(2.95)可得

$$X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_s\left(j\frac{\omega - 2\pi r}{T}\right) \quad (2.97)$$

由于单位圆上的 Z 变换是与信号的频谱相联系的,因而常称单位圆上的序列 Z 变换为

序列的傅里叶变换。

2.5 Matlab 实现

2.5.1 序列逆 Z 变换的 Matlab 实现

前面 2.2 节讨论过,直接计算围线积分比较困难。Matlab 的信号处理工具箱提供了函数 `residuez`,适合离散系统有理函数的留数和极点的计算,可以用于求解序列的逆 Z 变换。

设多项式为

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} \quad (2.98)$$

函数 `residuez` 的基本调用方式为

```
>>[r,p,c] = residuez(b,a);
```

其中,输入参数 $b=[b_0, b_1, \dots, b_M]$ 为分子多项式的系数, $a=[a_0, a_1, \dots, a_N]$ 为分母多项式的系数,这些多项式都按 z 的降幂排列;输出参数 r 是极点的留数, p 是极点, c 是无穷项多项式的系数项,仅当 $M \geq N$ 时存在。

例 2.19 计算 $X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}$ 的逆 Z 变换。

解 将 $X(z)$ 变换成有理分式,且分子和分母多项式都按 z 的降幂排列。

$$X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{0 + z^{-1}}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}$$

```
>>b=[0,1]; a=[2,-3,1];           % 多项式的系数
[r,p,c] = residuez(b,a);          % 求留数、极点和系数项
disp('留数: '); disp(r);          % 显示输出参数
disp('极点: '); disp(p);
disp('系数项: '); disp(c);
```

程序运行结果为

```
留数:      1      -1
极点:      1.0000    0.5000
系数项:
```

得到 $X(z)$ 的部分分式形式为

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

所以,逆 Z 变换为

$$x(n) = u(n) - (0.5)^n u(n)$$

函数 `residuez` 还可以用于将部分分式变换成多项式的系数形式,调用方式为

```
>>[b,a] = residuez(r,p,c);
```

例 2.20 求序列 $X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{2}{1 + z^{-1}}$ 的有理分式形式。

解

```
>>r=[1,-2]; p=[2,-1]; c=[]; %多项式的系数
[b,a]=residuez(r,p,c); %函数 residuez 的另一种调用方式
disp('分子多项式系数:'); disp(b); %显示输出参数
disp('分母多项式系数:'); disp(a);
```

程序运行结果为

```
分子多项式系数:      -1      5
分母多项式系数:      1      -1      -2
```

因此,序列 $X(z)$ 的有理分式形式为

$$X(z) = \frac{-1 + 5z^{-1}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}$$

2.5.2 周期序列傅里叶级数的 Matlab 实现

式(2.77)和(2.78)构成的一对周期序列的离散傅里叶级数变换对,可以很方便地用 Matlab 程序计算。对于式(2.77),用矩阵形式表示为

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix} = W \cdot \tilde{x} \quad (2.99)$$

由周期序列的离散傅里叶级数的定义, $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1$, 有

$$n' \cdot k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ N-1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 2(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & N-1 & 2(N-1) & \cdots & (N-1)(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

因此,只需计算 W_N 因子,利用矩阵理论计算式(2.99)为

$$\tilde{X} = W \cdot \tilde{x} = (W_N)^{n' \cdot k} \cdot \tilde{x} \quad (2.101)$$

例 2.21 设 $x(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 将 $x(n)$ 以 $N=4$ 为周期进行周期延拓, 得到周期为

4 的周期序列 $\tilde{x}(n)$, 求 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数。

解 本例实际上与例 2.17 相同。根据给定的序列和周期, 编写相应的程序为

```
>>xn=[0,1,2,3]; N=4; %设定序列和周期
```

```

n = [0: 1: N-1]; k = [0: 1: N-1]; % 设定 n 和 k
WN = exp(-j * 2 * pi/N); % 设定 Wn 因子
nk = n' * k; WNrnk = WN.^nk; % 计算 W 矩阵
Xk = xn * WNrnk; % 计算 DFS 的系数 Xk
disp(xn); disp(Xk); % 显示计算结果(系数)

```

程序第四行把 n 转置为 n' , 再与 k 进行矩阵相乘, 得到的整数方阵是 W 矩阵的指数, 因此, 利用矩阵的指数运算可以求出 W 矩阵。第五行进行矩阵相乘, 求出离散傅里叶级数的系数。程序运行结果为

```

0          1          2          3
6.0000   -2.0000 + 2.0000i   -2.0000 - 0.0000i   -2.0000 - 2.0000i

```

在上述 Matlab 程序中, 只需修改输入为 Xk , 输出为 xn , 程序第四、五行改为以下程序即可求出 DFS 反变换的系数。

```

>> nk = n' * k; IWNrk = WN.^( - nk); % 计算 W 逆矩阵
xn = (Xk * IWNrk)/N; % 计算 IDFS 的系数 xn

```

思考练习

用矩阵形式表示式(2.78), 分析利用上面 Matlab 程序可以计算 IDFS 系数的理由。试举出实例说明。

习 题

2.1 求下列序列的 Z 变换和收敛域。

- (1) $\delta(n-m)$
- (2) $2^{-n}u(n)$
- (3) $-2^{-n}u(-n-1)$
- (4) $2^{-n}[u(n)-u(n-10)]$
- (5) $\cos(\pi n/4)u(n)$

2.2 求下列序列的 Z 变换, 并画出零极点图和收敛域。

- (1) $x(n) = a^{|n|}$
- (2) $x(n) = (1/n)^n u(n-1)$
- (3) $x(n) = R_8(n)$
- (4) $x(n) = 2^{-n}[u(n)-u(n-10)]$
- (5) $x(n) = \sin(\omega_0 n + \theta)u(n)$

2.3 已知序列的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

问 $X(z)$ 可能的几种不同收敛域, 并分析各对应什么序列?

2.4 用长除法、部分分式展开法和围线积分法求下列 Z 变换的逆 Z 变换。

$$(1) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$(3) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(4) X(z) = \frac{z-a}{1-az}, |z| > |a^{-1}|$$

2.5 判断下列 Z 变换式哪几种对应因果性的系统和序列, 为什么?

$$(1) X(z) = (1 - z^{-1})^2 / \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$(2) X(z) = (z-1)^2 / \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$(3) X(z) = \left(z - \frac{1}{4}\right)^5 / \left(z - \frac{1}{2}\right)^6$$

$$(4) X(z) = \left(z - \frac{1}{4}\right)^6 / \left(z - \frac{1}{2}\right)^5$$

2.6 已知序列的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{-2 + 10z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

画出 $X(z)$ 的零极点图, 并就以下三种收敛域分析序列的类型, 求对应的序列 $x(n)$ 。

$$(1) 0.5 < |z| < 2$$

$$(2) |z| < 0.5$$

$$(3) |z| > 2$$

2.7 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $y(n) = b^n u(n)$, 其中 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ 。利用 Z 变换的性质求 $w(n) = x(n) * y(n)$ 。

2.8 已知序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 Z 变换分别为

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}, |z| > 0.5$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| < 0.5$$

利用复卷积公式求 $w(n) = x(n) \cdot y(n)$ 的 Z 变换。

2.9 试证明 $\operatorname{Re}[x(n)]$ 和 $\operatorname{Im}[x(n)]$ 的 Z 变换分别等于 $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$ 和 $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$ 。

2.10 已知序列 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z) = (1+j)/[1 - (1+j)z^{-1}]$, $|z| > \sqrt{2}$, 求共轭序

列 $x^*(n)$ 及其 Z 变换。

2.11 已知序列 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$, 求下列序列的 Z 变换。

(1) $x_1(n) = \nabla x(n)$

(2) $x_2(n) = x(2n)$

2.12 对下列因果序列 $x(n)$ 的 Z 变换, 求序列的初值和终值。

(1) $X(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

(2) $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.7z^{-1}-0.3z^{-2}}$

2.13 求 $X(z) = e^z + e^{1/z}$, $z \neq 0$ 的逆 Z 变换。

2.14 用 Z 变换解下列差分方程。

(1) $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$, $y(-1) = 0$

(2) $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$, $y(-1) = 1$

(3) $y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$

2.15 已知一个线性离散时不变系统满足差分方程

$$y(n-1) - \frac{10}{3}y(n) + y(n+1) = x(n)$$

且系统是稳定的, 试求其单位脉冲响应。

2.16 一个因果的线性时不变系统满足差分方程

$$y(n) - 2ry(n-1)\cos\theta + r^2y(n-2) = x(n)$$

对于输入 $x(n) = a^n u(n)$, 试用 Z 变换法求其单位脉冲响应。

2.17 求下列序列的傅里叶变换。

(1) $\delta(n-m)$

(2) $2^n u(-n)$

(3) $R_N(n)$

(4) $e^{-\alpha n} u(n)$

(5) $e^{-\alpha n} \sin(\omega_0 n) u(n)$

2.18 已知序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 求下列序列的傅里叶变换。

(1) $x(n-m)$

(2) $x(-n)$

(3) $nx(n)$

(4) $x(-n-1) + x(-n+1)$

(5) $(n-1)^2 x(n)$

(6) $x^2(n)$

(7) $\operatorname{Re}[x(n)]$

(8) $\operatorname{Im}[x(n)]$

(9) $x^*(n)$

(10) $x^*(-n)$

2.19 已知序列的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \omega_0 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

求 $x(n)$ 。

2.20 设序列的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega$, 求对应的序列 $x(n)$ 。

2.21 设 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 分别求出其偶函数 $x_e(n)$ 和奇函数 $x_o(n)$ 的傅里叶变换。

2.22 已知序列的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}, \quad |z| > 0.5$$

求 $x(n)$ 的傅里叶变换。

2.23 已知序列 $h(n)$ 是因果序列, 其傅里叶变换的实部为 $H_e(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega$, 求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

2.24 已知序列 $h(n)$ 是实因果序列, $h(0) = 1$, 其傅里叶变换的虚部为 $H_i(e^{j\omega}) = -\sin \omega$, 求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

2.25 对序列 $x(n) = R_5(n)$ 以 8 为周期进行周期延拓, 形成周期序列。求其离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

2.26 设 $\tilde{x}(n) = \{\dots, 0, 1, 2, -1, 0, 1, 2, -1, \dots\}$ 是一个以 $N=4$ 为周期的周期序列, 求 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

2.27 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(2\pi \times 100t)$, 以取样频率 $f_s = 400\text{Hz}$ 对 $x_a(t)$ 进行取样, 得到取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ 。要求:

(1) 写出 $x_a(t)$ 的傅里叶变换表示式 $X_a(j\Omega)$;

(2) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x(n)$ 的表达式;

(3) 求出 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x(n)$ 的傅里叶变换。

离散时间系统的变换域分析

3.1 引言

第2章已经讨论了离散时间信号的Z变换表示和傅里叶变换表示,其重点在变换及其特性上。对于如何使用Z变换和傅里叶变换分析线性时不变系统,只是简要地介绍了利用Z变换求解差分方程。

对系统的分析不同于对信号的分析,系统的分析着眼于其变换关系,重点在于系统的特性(包括第1章讨论过的线性、时不变性、因果性和稳定性等)、功能等。离散时间系统也可以从时域和变换域进行分析,本章将围绕Z变换和傅里叶变换分析方法展开对离散时间系统的研究,主要讨论离散时间系统的变换域分析、系统函数及频率响应等,这是学习数字滤波器的基本结构以及设计方法必不可少的理论基础。

3.2 系统函数

3.2.1 系统函数的定义

设序列 $x(n]$ 、 $y(n]$ 和 $h(n]$ 分别表示系统的输入、输出和单位脉冲响应, $X(z)$ 、 $Y(z)$ 和 $H(z)$ 分别代表它们的Z变换。从前面1.3节的讨论可知,一个线性时不变系统可以用卷积表示

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

将上式两边取Z变换,得

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.1)$$

称 $H(z)$ 为离散时间系统的系统函数,它表示系统的零状态响应与输入序列Z变换的比值,其中 $H(z) = \mathcal{Z}[h(n)]$ 、 $Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)]$ 、 $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$ 。

在1.4节已经讨论过,对于离散时间的线性时不变系统,常用线性常系数差分方程表示系统的输入与输出关系。研究一个输入和输出满足N阶差分方程的系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

如果输入序列为因果序列,系统为零初始状态,对上述差分方程两边取 Z 变换,并利用 Z 变换的线性和移位性质,可以得到

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

根据系统函数的定义式,则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.2)$$

可见,系统函数 $H(z)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 是一对 Z 变换,即

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} \quad (3.3)$$

前面已经讨论过,单位脉冲响应 $h(n)$ 能表征线性时不变系统,因此,系统函数 $H(z)$ 也能表征线性时不变系统。至此,已经掌握了三种表征离散时间系统的方法,差分方程及单位脉冲响应 $h(n)$ 从时域的角度反映了离散系统的特性,而系统函数 $H(z)$ 从 Z 域的角度反映了离散系统的特性,三者之间可以相互转换。由系统的差分方程可以求出单位脉冲响应 $h(n)$,也可以很容易写出其对应的系统的函数 $H(z)$;反之亦然。

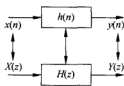


图 3.1 卷积法和 z 域法求解离散时间系统的关系

由以上分析还可以知道,系统的零状态响应既可以利用时域卷积法求解,也可以利用系统函数的变换域进行求解,先得到 $Y(z)$,再求逆变换得到 $y(n)$,其关系如图 3.1 所示。利用 Z 变换求解差分方程在 2.2 节中已经讨论过,这里通过例题进一步学习利用系统函数变换域的求解方法。

例 3.1 已知一个因果离散时间系统的差分方程为 $y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$,求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

解 零状态响应满足上述差分方程。设初始状态为零。对差分方程进行 Z 变换得到

$$Y(z) - 3z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

于是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 3z + 2}$$

将上式展开为部分分式,得到系统函数

$$H(z) = \frac{-3z}{z-1} + \frac{4z}{z-2}$$

因果系统的 $h(n)$ 为因果序列。对 $H(z)$ 取逆 Z 变换,得单位脉冲响应

$$h(n) = (-3 + 4 \times 2^n) u(n)$$

例 3.2 已知一个离散时间系统的输入序列 $x(n) = 2^n u(n)$,系统的零状态响应为 $y(n) = [2^n - (-1)^n + 3 \times (-2)^n] u(n)$,求系统函数 $H(z)$ 及描述系统的差分方程。

解 根据系统函数的定义,先求 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 Z 变换

$$X(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+1} + \frac{3z}{z+2} = \frac{3z^3}{(z-2)(z+1)(z+2)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2}{(z+1)(z+2)} = \frac{3z^2}{z^2+3z+2} = \frac{3}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

即

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = 3X(z)$$

上式为零初始状态,取其逆 Z 变换,得到差分方程

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 3x(n)$$

如果按 $H(z)$ 正幂次展开求其逆 Z 变换,则得到前向差分方程,即

$$z^2Y(z) + 3zY(z) + 2Y(z) = 3z^2X(z)$$

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 3x(n+2)$$

3.2.2 系统的零极点对系统特性的影响

由式(3.2)可知,系统函数 $H(z)$ 是两个复变量 z^{-1} 的多项式之比,其分子、分母多项式的系数分别与差分方程的系数相同。对分子、分母多项式进行因式分解,得

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3.4)$$

式(3.4)分子中每一个因子 $(1 - c_i z^{-1})$ 使 $H(z)$ 在 $z = c_i$ 处有一个零点,分母中每一个因子 $(1 - d_k z^{-1})$ 使 $H(z)$ 在 $z = d_k$ 处有一个极点,当 $N > M$ 时,在 $z = 0$ 处有一个 $(N - M)$ 阶零点。这些零点和极点分别由差分方程的系数 b_i 和 a_k 决定。因此,除了比例常数 A 以外,系统函数完全由它的全部零、极点惟一确定。所以也可以说零、极点是描述系统的方法,因为已知系统的零、极点分布,就可以大致了解系统的性能。

下面分析零、极点对系统的影响。为了更清楚地表示零、极点的分布情况,可以将 $H(z)$ 的零、极点表示在 z 平面上,这样就得到 $H(z)$ 的零、极点图。在 $H(z)$ 的零、极点图中,通常用 \circ 表示零点,而用 \times 表示极点。

需要注意的是,零、极点既可能是实数,也可能是纯虚数或复数。由于系统函数 $H(z)$ 的分子、分母项系数 b_i 和 a_k 均为实数,所以,零、极点若为虚数或复数,则一定共轭成对,这一点在分析中很重要。

由于系统函数 $H(z)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 是一对 Z 变换,所以系统的单位脉冲响应序列的形式完全可以由 $H(z)$ 的极点确定。

首先,讨论系统函数 $H(z)$ 有单阶极点的情况。若有一个实极点 $d = a$,则分母多项式中有因子 $(z - a)$,它所对应的单位脉冲响应序列形式为 $Ka^n u(n)$;若有一对共轭极点 $d_{1,2} = a \cdot e^{\pm j\theta}$,则 $D(z)$ 中有因子 $z^2 - 2a \cos \theta z + a^2$,它所对应的单位脉冲响应序列形式为 $Ka^n \cos(\theta n + \theta) u(n)$,

其中 K, θ 为常数, 与零点的分布有关。

当极点位于单位圆内时, $|a| < 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a^n \rightarrow 0$, 即单位脉冲响应序列 $h(n)$ 趋于零, 为收敛序列; 当极点位于单位圆上时, $|a| = 1$, 单位脉冲响应序列 $h(n)$ 的幅度不随 n 变化, 为稳定序列; 当极点位于单位圆外时, $|a| > 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a^n \rightarrow \infty$, 即单位脉冲响应序列 $h(n)$ 的幅度随 n 的增大而增大, 为发散序列。 $H(z)$ 的一阶极点与对应的单位脉冲响应序列形式如图 3.2 所示, 图 3.2(a) 中的极点与图 3.2(b) 中的波形分别标出了序号, 相同序号具有对应关系。

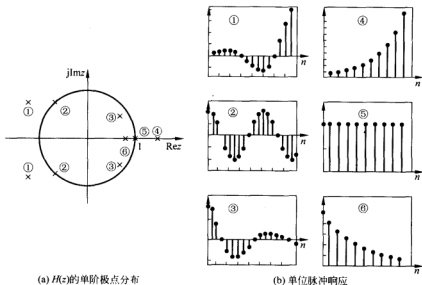


图 3.2 系统函数的极点与对应的单位脉冲响应

再讨论系统函数 $H(z)$ 有 r 阶极点的情况。设有一个 r 阶实极点 $d=a$, 或一对 r 阶共轭极点 $d_{1,2} = a \cdot e^{\pm j\theta}$, 它们所对应的单位脉冲响应序列形式为 $K_i n^i a^n u(n)$ 或 $K_i n^i a^n \cos(\beta n + \theta) u(n)$, 其中 $i=0, 1, 2, \dots, r-1$ 。当极点位于单位圆内或单位圆外时, 分析结果与单阶极点情况相同; 但当极点位于单位圆上时, $|a|=1$, 由于有因子 n^i , 单位脉冲响应序列的幅度随 n 的增大而增大, 为发散序列, 这一点与单阶极点结果不同。

由以上讨论得到如下结论:

(1) 离散时间系统的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 可由 $H(z)$ 的零、极点确定。零点只影响 $h(n)$ 的幅度与相位, 极点的分布影响 $h(n)$ 的形状。

(2) $H(z)$ 在单位圆内的极点所对应的 $h(n)$ 都是衰减的, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 序列的值趋于零, $h(n)$ 是收敛序列, 因此, 极点全部在单位圆内的系统是稳定系统。

(3) $H(z)$ 在单位圆上的一阶极点所对应的 $h(n)$ 的幅度不随 n 变化, 其对应的系统是临界稳定系统。

(4) $H(z)$ 在单位圆上的二阶及二阶以上的极点, 或在单位圆外的极点所对应的 $h(n)$ 随 n 的增大而增大, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 序列值趋于无限大, $h(n)$ 是发散序列, 这样的系统是非稳定系统。

3.2.3 系统的因果性和稳定性

系统的因果性和稳定性是一类很重要的性质,是在实际应用中必须考虑的问题。前面 1.3 节从系统的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 出发,讨论了判断系统的因果性和稳定性的充分必要条件。由于系统函数 $H(z)$ 和单位脉冲响应 $h(n)$ 是一对 Z 变换,它们分别从 Z 域和时域表征了系统的特征,下面分析如何根据 $H(z)$ 判断系统的因果性和稳定性。

首先,讨论因果性。由 1.3 节可知,系统具有因果性的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

即因果系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 必是一个右边序列,更准确地说,是一个因果序列。而且因果序列所对应的 Z 变换 $H(z)$ 的收敛域必须包含 ∞ ; 换句话说, ∞ 一定不是系统函数 $H(z)$ 的极点,即因果系统的 $H(z)$ 的收敛域为

$$R_{z-} < |z| \leq +\infty \quad (3.5)$$

再讨论稳定性。同样由 1.3 节可知,系统具有稳定性的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

因此,若系统函数在单位圆上收敛,则系统是稳定的。这也意味着,如果系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆,则系统是稳定的。反之,如果系统稳定,则系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆。也可以说,系统函数 $H(z)$ 在单位圆上没有极点。

显然,关于系统因果性和稳定性的讨论可以得出一个重要的结论:

一个因果稳定系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须在某个圆的外部,该圆经过 $H(z)$ 的离原点最远的极点,而且收敛域必须包含单位圆。即

$$R_{z-} < |z| \leq +\infty, \quad 0 < R_{z-} < 1 \quad (3.6)$$

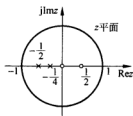
也就是说,如果系统函数 $H(z)$ 的所有极点都在单位圆内,则系统是稳定的。反之,如果系统稳定,则系统的所有极点都在单位圆内。

例 3.3 已知一个线性时不变系统的系统函数 $H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$, 试确定系统的收敛域,并分析系统的因果性和稳定性。

解 对 $H(z)$ 的分母进行因式分解得

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

极点为 $z_1 = -\frac{1}{4}$, $z_2 = -\frac{1}{2}$; 零点为 $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$, 如图 3.3 所示。两个极点把 z 平面划分为三个区域,所以 $H(z)$ 的收敛域有三种可能的情况,下面分别进行讨论。



(1) 如果收敛域是极点 $z_2 = -\frac{1}{2}$ 所在的圆的外部区域,收

图 3.3 系统的零、极点分布

收敛域包含点 ∞ ,有 $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z)=1$,因此,系统是因果的。系统函数的收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| \leq +\infty$,而且包含单位圆,所以对应系统是稳定的。

(2) 如果收敛域是极点 $z_1 = -\frac{1}{4}$ 所在的圆的内部区域,有 $\lim_{z \rightarrow 0} H(z)=0$,因此,系统是逆因果的,收敛域为 $0 \leq |z| < \frac{1}{4}$ 。收敛域不包含单位圆,所以对应系统不是稳定的。

(3) 如果收敛域是极点 $z_1 = -\frac{1}{4}$ 和 $z_2 = -\frac{1}{2}$ 所在的两个圆之间的环域,即 $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$,收敛域不包含点 ∞ ,单位圆也没有位于收敛域内,所以对应系统是非因果且不稳定的。

例 3.4 已知一个系统函数 $H(z) = \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$,求系统的单位脉冲响应。

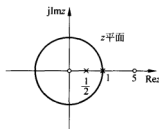


图 3.4 系统的零、极点分布图

解 $H(z)$ 的极点为 $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 1$; 零点为 $z_1 = 5$, $z_2 = 0$,如图 3.4 所示。两个极点把 z 平面划分为三个区域,所以 $H(z)$ 有三种不同的收敛域。

可用部分分式法求 $H(z)$ 的逆 Z 变换,得到

$$H(z) = \frac{-9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}$$

(1) 如果收敛域取 $1 < |z| \leq +\infty$,因为收敛域包含点 ∞ ,所以系统是因果的。但收敛域不包含单位圆,系统不是稳定的。因此,对应的单位脉冲响应为

$$h(n) = -9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 8u(n)$$

(2) 如果收敛域取 $0 \leq |z| < \frac{1}{2}$,显然系统既不是因果的,也不是稳定的,其单位脉冲响应为

$$h(n) = 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 8u(-n-1)$$

(3) 如果收敛域取 $\frac{1}{2} < |z| < 1$,系统既不是因果的,也不是稳定的,其单位脉冲响应为

$$h(n) = -9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 8u(-n-1)$$

3.3 线性时不变系统的频率响应

第 1 章研究的线性时不变系统的输出与输入之间的线性卷积关系,是其时域特性;系统函数 $H(z)$ 从复频域的角度描述了线性时不变系统,然而实际的信号都是实频率的情况。为了研究离散线性时不变系统对输入频谱的处理作用,本节将研究系统的频率响应。频率

响应是离散系统的重要概念,它在滤波器的设计中有着重要的作用。下面首先研究输入为复指数序列或正弦序列时系统的响应,引入频率响应的概念;然后讨论几种特殊的离散系统。

3.3.1 频率响应的定义

设输入序列是一个数字域频率为 ω 的复指数序列,即

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

由线性卷积公式,得到系统的响应

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega}) \quad (3.7)$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (3.8)$$

上式表明,当离散线性时不变系统的输入是频率为 ω 的复指数序列时,输出为同频率的复指数序列乘以加权函数 $H(e^{j\omega})$ 。 $H(e^{j\omega})$ 反映了复指数序列通过系统后幅度和相位随频率 ω 的变化。 $H(e^{j\omega})$ 是一个与系统的特性有关的量,称为单位脉冲响应为 $h(n)$ 的系统的频率响应。

频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在数值上等于 $H(z)$ 在 z 平面单位圆上的取值。如果已知系统函数 $H(z)$,则可求得其频率响应,即

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})} \quad (3.9)$$

$H(e^{j\omega})$ 一般是复函数,是以 2π 为周期的连续周期函数,可表示为

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$H_R(e^{j\omega})$ 和 $H_I(e^{j\omega})$ 分别是 $H(e^{j\omega})$ 的实部和虚部。 $H(e^{j\omega})$ 也可以用幅度与相位表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 和相位 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 分别称为 $H(e^{j\omega})$ 的幅度响应和相位响应。

式中

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

由于正弦序列可以表示为复指数序列的线性组合,因此,系统的频率响应也可以表示成正弦序列通过系统后幅度和相位随频率 ω 的变化。具体地说,设输入为

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

根据式(3.7),系统对 $(A/2) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ 的响应为

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0}) \cdot \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$$

根据序列傅里叶变换的折叠性质,即式(2.51),系统对 $(A/2)e^{-j\omega_0 n}$ 的响应为

$$y_2(n) = H(e^{-j\omega_0}) \cdot \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

系统对 $x(n)$ 的总响应为

$$y(n) = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) \cdot e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) \cdot e^{-j\omega_0 n}]$$

若 $h(n)$ 为实数,根据序列傅里叶变换的对称性质,有

$$\begin{aligned} H(e^{-j\omega_0}) &= H^*(e^{j\omega_0}) \\ |H(e^{-j\omega_0})| &= |H(e^{j\omega_0})| \\ \arg[H(e^{-j\omega_0})] &= -\arg[H(e^{j\omega_0})] \end{aligned}$$

所以

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cdot \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta)$$

式中, $\theta = \arg[H(e^{j\omega_0})]$ 是系统在频率 ω_0 处的相位响应。可以看出,当离散线性时不变系统的输入是正弦序列时,输出为同频率的正弦序列,其幅度受频率响应幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 的加权,而相位为输入相位与系统相位响应 $\arg[H(e^{j\omega_0})]$ 之和。

式(3.8)表示的系统频率响应是一种傅里叶级数表示方法, $h(n)$ 可以看作傅里叶级数的系数。因此,频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 构成一对傅里叶变换对。根据傅里叶变换存在的条件,如果系统是稳定的,即其单位脉冲响应 $h(n)$ 绝对可和,则式(3.8)中的级数收敛,因而系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 也收敛。

在输入为任意序列的情况下,线性时不变系统的输入与输出之间的傅里叶变换关系,可通过对式(3.7)两边取傅里叶变换,得到

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad (3.10)$$

式(3.10)表明,对于线性时不变系统,输出序列的傅里叶变换等于输入序列的傅里叶变换与系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的乘积,再进一步对 $Y(e^{j\omega})$ 求傅里叶逆变换,可得输出序列

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.11)$$

这就是系统的实频率求解方法,是分析系统的又一途径。如果用幅度与相位表示频率响应,则系统的输入与输出之间的傅里叶变换的幅度与相位的关系可表示为

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})| \quad (3.12)$$

$$\arg[Y(e^{j\omega})] = \arg[H(e^{j\omega})] + \arg[X(e^{j\omega})] \quad (3.13)$$

3.3.2 频率响应的几何确定法

根据式(3.9)得知,系统的频率响应完全由 $H(z)$ 的零、极点确定。频率响应的几何确定法实际就是利用 $H(z)$ 在 z 平面上零、极点的分布,通过几何方法直观、定性地求出系统的频率响应。

设 c_r 是 $H(z)$ 的零点, d_k 是其极点,由式(3.9)得系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \quad (3.14)$$

在 z 平面上,复变量 c_r (或 d_k) 用由原点指向 c_r 点 (或 d_k 点) 的矢量表示,如图 3.5 所示。 $e^{j\omega} - c_r$ 用由零点 c_r 指向单位圆上的点 $e^{j\omega}$ 的矢量 A_r 来表示

$$e^{j\omega} - c_r = A_r = A_r e^{j\varphi_r}$$

同样, $e^{j\omega} - d_k$ 用由极点 d_k 指向单位圆上的点 $e^{j\omega}$ 的矢量 B_k 来表示

$$e^{j\omega} - d_k = B_k = B_k e^{j\theta_k}$$

分别称矢量 A_r 、 B_k 为零点矢量、极点矢量。式中, A_r 、 B_k 分别表示矢量 A_r 、 B_k 的模,即矢量长度;而 φ_r 、 θ_k 分别表示矢量 A_r 、 B_k 的幅角,即对应矢量与正实轴的夹角,这样式(3.14)可表示为

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M A_r e^{j\varphi_r(\omega)}}{\prod_{k=1}^N B_k e^{j\theta_k(\omega)}} = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.15)$$

则幅度响应为

$$|H(e^{j\omega})| = A \frac{\prod_{r=1}^M A_r}{\prod_{k=1}^N B_k} \quad (3.16)$$

可见,频率响应的幅度等于各零点矢量长度之积除以各极点矢量长度之积,再乘以常数 A ;而相位响应为

$$\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^M \varphi_r(\omega) - \sum_{k=1}^N \theta_k(\omega) \quad (3.17)$$

式(3.17)说明,相位响应等于各零点矢量的幅角之和减去各极点矢量的幅角之和,再加上线性分量 $\omega(N-M)$ 。在 $z=0$ 处的零点或极点,由于 $|e^{j\omega}-0|=1$,因此,对幅度响应没有影响,只会使相位响应发生改变。

图 3.5 表示了两个极点、一个零点的频率响应的几何解释及其对应的幅度响应曲线和相位响应曲线。图中, E 点位于单位圆上,表示矢量 A_r 、 B_k 的终点。当频率 ω 从 0 变到 2π 时, E 点沿单位圆逆时针旋转一周,按照式(3.16)和(3.17)可以分别估算出系统的幅度响应和相位响应。

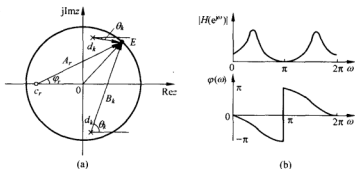


图 3.5 频率响应的几何确定法

零点的位置主要影响幅度响应的谷点值及形状。当 E 点旋转到某个零点 c_r 附近时, 如果零点矢量长度 A_r 最短, 则幅度响应在该点可能出现谷点; 零点 c_r 越靠近单位圆, A_r 越短, 则谷点越接近零; 如果零点 c_r 在单位圆上, $A_r=0$, 则谷点为零。

极点的位置主要影响幅度响应的峰值及尖锐程度。当 E 点旋转到某个极点 d_s 附近时, 如果极点矢量长度 B_s 最短, 则幅度响应在该点可能出现峰值; 极点 d_s 越靠近单位圆, B_s 越短, 则幅度响应在峰值附近越尖锐; 如果极点 d_s 在单位圆上, $B_s=0$, 则幅度响应的峰值趋于无穷大, 此时系统不稳定。

综上所述, 单位圆附近的零点位置对幅度响应凹谷的位置和深度有明显的影响, 零点可在单位圆外。而在单位圆内且靠近单位圆附近的极点对幅度响应的凸峰的位置和深度则有明显的影响, 极点在单位圆外, 则不稳定。利用这种直观的几何确定法, 适当地控制零、极点的分布, 就能改变系统频率响应的特性, 达到预期的要求, 因此, 它是一种非常有用的分析系统的方法。

例 3.5 已知一个系统函数 $H(z)=1-z^{-N}$, 试定性画出系统的幅度响应曲线。

解

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

$H(z)$ 有一个 N 阶极点 $z=0$, 不影响系统的幅度响应; 有 N 个一阶零点, 由分子多项式的根决定。

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

N 个零点等间隔分布在单位圆上。设 $N=8$, 零、极点分布如图 3.6(a) 所示。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega N} - 1}{e^{j\omega N}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{j\omega N} - 1|$$

由于零点在单位圆上, 当 ω 从 0 变化到 2π 时, 每遇到一个零点幅度为零; 在两个零点之间, 幅度由零逐渐增大, 且在零点的中间幅度最大, 形成峰值, 然后由峰值逐渐减少至零。幅度谷点频率为 $\omega_k = 2\pi k/N, k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。其幅度响应曲线如图 3.6(b) 所示, 通常称具有这种形状的系统为梳状滤波器。

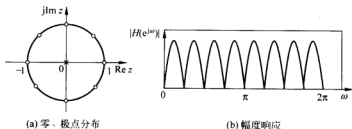


图 3.6 梳状滤波器的零、极点分布及幅度响应

例 3.6 设一阶系统的差分方程为 $y(n)=x(n)+ay(n-1)$, $|a|<1$, a 为实数, 求系统的频率响应。

解 将差分方程等式两端取 Z 变换, 求系统函数得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

这是一个因果系统,可求出单位脉冲响应为

$$h(n) = a^n u(n)$$

该一阶系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

幅度响应为

$$|H(e^{j\omega})| = (1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{-1/2}$$

相位响应为

$$\arg H(e^{j\omega}) = -\arctan \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

$h(n)$ 、 $H(e^{j\omega})$ 、 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 的图形分别如图 3.7 所示。若要使系统稳定,要求极点在单位圆内,即要求实数 a 满足 $|a| < 1$ 。此时,若 $0 < a < 1$,则系统呈低通特性;而 $-1 < a < 0$,则系统呈高通特性。

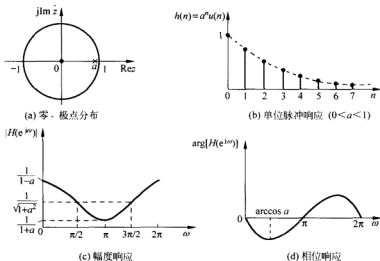


图 3.7 一阶系统的零、极点分布及频率响应

由 $h(n)$ 看出此系统的脉冲响应是无限长的序列。

3.3.3 全通系统

如果系统的幅度响应 $|H(e^{j\omega})|$ 在所有的频率 ω 下均为常数,则这类系统称为全通系统。全通系统的系统函数记为 $H_{ap}(z)$,对于一阶全通系统,其一般形式为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (3.18)$$

其频率响应为

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} \quad (3.19)$$

在式(3.19)中, $e^{j\omega}$ 的幅度为 1, 余下的分子与分母多项式互为复共轭, 因此, 具有相同的幅度, 即 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$ 。可见, 一阶全通系统使输入的全部频率分量都能通过, 而且幅度增益为 1。通常全通系统是由形式如式(3.19)表达的一阶系统级联而成的, 具有实单位脉冲响应的全通系统的系统函数更一般形式为

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_i}{1 - d_i z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})} \quad (3.20)$$

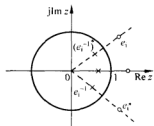


图 3.8 典型的全通系统的零、极点分布

式中, d_r 为实数极点, e_k 为 $H_{ap}(z)$ 的复数极点。对于因果稳定的全通系统, $|d_r| < 1$ 和 $|e_k| < 1$ 。在式(3.20)中, 全通系统有 $M = N = 2M_c + M_r$ 个极点和零点。图 3.8 所示的为一个典型的全通系统零、极点分布状况, 这里 $M_c = 2$ 和 $M_r = 1$ 。由此可见, $H_{ap}(z)$ 的每一个极点都有一个配对的共轭倒数零点。具体地说, 若系统有一实数零(极)点 d_r , 则对应有一实数极(零)点 $1/d_r$; 若系统有一对复数零(极)点 e_k 及 e_k^* , 则对应有一对复数极(零)点 $1/e_k$ 及 $(1/e_k)^*$ 。

式(3.20)表达的 N 阶全通系统可以展开的一般形式为

$$H_{ap}(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-N+i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad (3.21)$$

考虑 a_i 为实数的情况, 式中 $a_0 = 1$ 。显然, 分子与分母多项式的系数相同, 只是排列顺序相反。 $H_{ap}(z)$ 也可以表示为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^N \sum_{i=0}^N a_i z^i}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = z^{-N} \frac{D(z)}{D(z^{-1})} \quad (3.22)$$

$H_{ap}(z)$ 对应的频率响应为

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} \frac{D(e^{j\omega})}{D(e^{-j\omega})}$$

由于 a_i 为实数, 所以 $D(e^{j\omega}) = D^*(e^{-j\omega})$ 。于是

$$\left| H_{ap}(e^{j\omega}) \right| = \left| e^{-j\omega N} \frac{D(e^{j\omega})}{D(e^{-j\omega})} \right| = \left| e^{-j\omega N} \right| \cdot \left| \frac{D(e^{j\omega})}{D(e^{-j\omega})} \right| = 1 \quad (3.23)$$

上式说明了式(3.21)具有全通系统的特性。

全通系统有很多用途。信号通过全通系统在幅度谱上没有任何变化, 只有相位上的改变, 因此, 全通系统是一个纯相位滤波器。相位均衡器可以利用这一特性来校正系统的非线性相位, 以得到线性相位系统, 同时不改变系统的幅度特性。

例 3.7 设二阶全通系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}$$

求系统的频率响应函数,并画出相应曲线。

解 $H(z)$ 的表示式也可以写成

$$H(z) = 4 \cdot \frac{z^2 - 2z + 4}{4z^2 - 2z + 1}$$

其零、极点分别为

$$c_{1,2} = 1 \pm j\sqrt{3} = 2e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$

$$d_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$

显然零点与极点有共轭倒数关系,即

$$c_1 = 1/d_1^*, \quad c_2 = 1/d_2^*$$

系统的零、极点分布如图 3.9(a)所示。由于极点均在单位圆内,故 $H(z)$ 在单位圆上收敛。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 4 \cdot \frac{z^2 - 2z + 4}{4z^2 - 2z + 1} \bigg|_{z=e^{j\omega}} = 4 \cdot \frac{e^{2j\omega} - 2e^{j\omega} + 4}{4e^{2j\omega} - 2e^{j\omega} + 1} \\ &= 4 \cdot \frac{e^{j\omega} - 2 + 4e^{-j\omega}}{4e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}} = 4 \cdot \frac{(5\cos\omega - 2) - j3\sin\omega}{(5\cos\omega - 2) + j3\sin\omega} \end{aligned}$$

其幅度响应和相位响应分别为

$$|H(e^{j\omega})| = 4$$

$$\varphi(\omega) = -2\arctan \frac{3\sin\omega}{5\cos\omega - 2}$$

其幅度响应和相位响应曲线如图 3.9(b)所示。

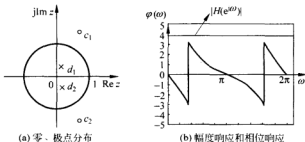


图 3.9 二阶系统的零、极点分布及频率响应

3.3.4 最小相位系统

对于一个具有有理系统函数的线性时不变系统,其频率响应的幅度不能惟一地表征系统。如果系统是因果和稳定的,其极点必须全部位于单位圆内部,但是对零点的位置没有任何限制。对于某些场合,要求一个因果和稳定的系统,其逆系统(系统函数为 $1/H(z)$)也是因果和稳定的。因为 $1/H(z)$ 的极点就是 $H(z)$ 的零点,这样就把零点和极点都限制在单位圆内。

如果系统函数 $H(z)$ 的所有极点位于单位圆内,而它的零点也全部位于单位圆内(包括在单位圆上),则称该系统为最小相位系统,系统函数记为 $H_{\min}(z)$ 。当角频率 ω 由 0 到 2π

变化时,最小相位系统具有最小的相位变化量。与之对应,如果稳定系统的零点全部位于单位圆外,则称该系统为**最大相位系统**,系统函数记为 $H_{\max}(z)$ 。系统的相位响应的大小影响信号通过系统后的相位改变量,相位变化越小,意味着延时越小。下面从系统函数 $H(z)$ 的零、极点分布出发,讨论系统的相位特性。

设系统有 N 个极点,极点全部位于单位圆内;有 M 个零点,单位圆内有 m_i 个,单位圆外有 m_o 个。由前面的分析可知,当 ω 由 0 到 2π 变化时,单位圆内零点引起的相位变化为 $2\pi m_i$,而单位圆外零点引起的相位变化为零;同样,单位圆内极点引起的相位变化为 $-2\pi N$ 。根据式(3.17)可知,当 ω 由 0 到 2π 变化时,总的相位变化量为

$$\Delta \arg[H(e^{j\omega})] = 2\pi(N - M) - 2\pi N + 2\pi m_i = -2\pi m_o \quad (3.24)$$

根据式(3.17),对于因果稳定系统,极点全部位于单位圆内,相位变化量只取决于单位圆外零点的个数 m_o 。当零点全部位于单位圆内时,相位变化量为零,即最小相位系统相位变化等于零;而当零点全部位于单位圆外时,相位变化等于 $-2\pi M$,即最大相位系统的相位变化量。还有一种系统的零点在单位圆内外都有,这样的系统称为**混合相位系统**。以上三种因果稳定系统中,最重要最常用的是最小相位系统。

任何一个系统都可以表示成一个最小相位系统和一个全通系统的级联。或者说,任意一个有理系统函数都可以表示成

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z) \quad (3.25)$$

例如,对于一个非最小相位系统 $H(z)$,假设只有一个零点 $1/c^*$ 位于单位圆外,其余零、极点都位于单位圆内,则

$$H(z) = H_1(z) \cdot (z^{-1} - c^*) \quad (3.26)$$

式中 $H_1(z)$ 为最小相位系统。将上式乘以一阶全通函数,即

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1}) \frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}} \quad (3.27)$$

由于 $|c| < 1$,所以因子 $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ 也是最小相位的,它将 $H(z)$ 在单位圆外的零点 $1/c^*$ 反射到单位圆内形成最小相位系统 $H_{\min}(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1})$ 的零点 c 。而因子 $(z^{-1} - c^*)/(1 - cz^{-1})$ 是全通的。显然,这个例子可以推广到有多个位于单位圆外的零点的非最小相位系统。从而,可以得出式(3.25)的结论。

式(3.25)说明,通过乘以全通系统函数,可以把单位圆内(外)的零点反射到单位圆外(内),而整个系统的幅度特性不变。因此,可以从一个非最小相位系统,将其位于单位圆外的全部零点反射到单位圆内,以形成一个最小相位系统。也可以从一个最小相位系统,将其位于单位圆内的一个或多个零点反射到单位圆外,以形成一个非最小相位系统。

3.4 无限脉冲响应系统和有限脉冲响应系统

在线性时不变系统中,有两类不同的系统。如果系统的单位脉冲响应是无穷长的,则称为**无限脉冲响应系统**,简记为 IIR 系统。如果系统的单位脉冲响应是一个有限长序列,则称为**有限脉冲响应系统**,简记为 FIR 系统。

例 3.8 已知一个因果线性时不变系统的差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$,试分析系统的单位脉冲响应。

解 根据前面的讨论,显然其系统函数为

$$H(z) = 1/(1 - az^{-1})$$

如果要求系统因果可实现,则收敛域必须为 $|z| > |a|$ 。如果要求系统稳定,则必须 $|a| < 1$ 。系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = a^n u(n)$$

可见,系统的单位脉冲响应是无穷长的,因此,为 IIR 系统。系统在有限 z 平面出现极点 $z=a$ 。

例 3.9 分析一个单位脉冲响应为 $h(n)=a^N R_N(n)$ 的系统。

解 由于 $h(n)$ 是一个有限长序列,因此,为 FIR 系统。系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$$

系统函数的零点为

$$z_k = ae^{j2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

系统在 z 平面的 $z=a$ 处有一个极点。假设 a 为正实数,显然 $z=a$ 的极点被 $z=a$ 的零点抵消。可直接写出系统的差分方程为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k x(n-k)$$

而根据其系统函数,可得差分方程的另一种等价形式为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - a^N x(n-N)$$

讨论离散时间的线性时不变系统,可用 a_0 除系统函数分子、分母的每一项,将式(3.2)归一化为 $a_0=1$,即

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.28)$$

如果式(3.28)的分母多项式只要有一个系数 $a_k \neq 0$,则在有限 z 平面就会出现极点,这个系统就是 IIR 系统。如果分子只有常数项 b_0 ,则在有限 z 平面只有极点,称为全极点系统,或称自回归系统(AR 系统)。当 $H(z)$ 是有理函数,在有限 z 平面既有极点也有零点,称为零极点系统,或称自回归滑动平均系统(ARMA 系统)。如果全部 $a_k = 0 (k=1, 2, \dots, N)$,则系统就属于 FIR 系统。这是因为有限长序列 $h(n)$ 的 z 变换 $H(z)$ 在有限 z 平面 $0 < |z| < \infty$ 处收敛,也就是说, $H(z)$ 在有限 z 平面没有极点只存在零点,故又称为全零点系统,或称滑动平均系统(MA 系统)。

由于 IIR 系统至少有一个 $a_k \neq 0$,从结构类型来看,其差分方程(设 $a_0=1$)为

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

可以看出,求 $y(n)$ 时需将输出 $y(n)$ 延时为 $y(n-k)$ 反馈回来,用 a_k 加权后和各 $b_r x(n-r)$ 相加,这种有反馈回路的结构称为递归结构。显然, IIR 系统的输出不仅和各 $x(n-r)$ 有关,而且和各 $y(n-k)$ 有关。

如果全部 $a_k = 0 (k=1, 2, \dots, N)$,则没有反馈回路,称之为非递归结构。显然, FIR 系统的输出只和输入 $x(n-r)$ 有关。

IIR 系统只能采用递归结构实现。FIR 系统多采用非递归结构；但通过零点、极点互相抵消的方法，也可采用含有递归结构的电路。由于 IIR 系统和 FIR 系统的特性和设计方法不同，因而成为数字滤波器的两大分支，将在第 6 章分别加以讨论。

3.5 Matlab 实现

3.5.1 系统函数的 Matlab 计算

Matlab 提供了函数 tf2zp 和 zp2tf，可以用于系统函数不同形式之间的转换。

设系统函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.29)$$

函数 tf2zp 的调用方式为

```
>>[z,p,k]=tf2zp(b,a);
```

其中，输入参数 $b=[b_0, b_1, \dots, b_M]$ 为按 z 的降幂排列的分子多项式系数， $a=[a_0, a_1, \dots, a_N]$ 为降幂排列的分母多项式系数。输出参数 z 是 Z 变换的零点， p 是极点， k 是增益。

因此，利用函数 tf2zp 可以确定有理 Z 变换式的零点、极点和增益。函数 zp2tf 则由 Z 变换的零点、极点和增益确定有理 Z 变换式的分子、分母多项式系数，其调用方式为

```
>>[b,a]=zp2tf(z,p,k);
```

例 3.10 一个线性时不变系统的差分方程为 $y(n)-y(n-1)+0.5y(n-2)=2x(n)+1.5x(n-1)$ ，求其 Z 变换，并分析系统的稳定性。

解 由差分方程得到系统函数为

$$H(z) = \frac{2+1.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

```
>>b=[2,1.5,0]; a=[1,-1,0.5]; % 系统函数多项式的系数
[z,p,k]=tf2zp(b,a); % 求零点、极点和增益
disp('零点:'); disp(z); % 显示输出参数
disp('极点:'); disp(p);
disp('增益:'); disp(k);
zplane(z,p); % 画零、极点图
axis([-1.25,1.25,-1.25,1.25]); % 标示坐标
```

程序运行结果为

```
零点: 0 -0.7500
极点: 0.5000 -0.5000i 0.5000+0.5000i
增益: 2
```

程序第二行调用函数 $[z,p,k]=tf2zp(b,a)$ ，确定系统函数的零点、极点和增益。第六行使用函数 $zplane$ 画出零点、极点及单位圆。由图 3.10 所示的系统的零、极点分布可知，

全部极点都位于单位圆内,所以系统是稳定的。

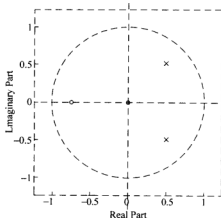


图 3.10 例 3.10 的系统零、极点分布

思考练习

函数 `zplane` 另一种调用形式为 `zplane(b,a)`, `b`、`a` 分别为 Z 变换中分子和分母多项式系数。试利用该调用形式修改例 3.10 的程序,直接画出零点、极点及单位圆。

3.5.2 利用系统函数求解系统输出的 Matlab 实现

在第 2 章讨论过利用 Z 变换求解系统的差分方程,这里通过举例来讨论输入序列经过系统时,如何利用系统函数的变换域方法求解输出的问题。

例 3.11 已知系统函数为 $H(z) = \frac{-2z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.1875z^{-3}}$, 求输入序列 $x(n) = [2, -1, 0.25]$ 时系统的输出。

解 输入序列可表示为 $x(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) + 0.25\delta(n-2)$, 其 Z 变换为 $X(z) = 2 - z^{-1} + 0.25z^{-2}$, 因此,系统在 Z 域的输出为

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{-2z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.1875z^{-3}} (2 - z^{-1} + 0.25z^{-2}) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

系统函数 $H(z)$ 的系数 $b = [-2, a = [1, -0.75, -0.25, 0.1875]$, $x = [2, -1, 0.25]$, 可以用函数 `conv` 来计算多项式乘法,以确定 $Y(z)$ 的系数 B 和 $A = a$, 然后利用函数 `residuez` 求留数和极点等。这部分程序段为

```
>> x=[2, -1, 0.25];
nfx=length(x)-1;
b=-2; a=[1, -0.75, -0.25, 0.1875];
B=conv(b,x); A=a;
[r,p,c]=residuez(B,A);
disp('留数: '); disp(r);
```

% 计算输入序列的终止时间
 % 系统函数多项式的系数
 % 确定 $Y(z)$ 的系数
 % 求留数、极点和系数项
 % 显示输出参数

```
disp('极点:'); disp(p);
disp('系数项:'); disp(c);
```

程序运行结果为

```
留数:   -4.0000   2.0000  -2.0000
极点:    0.7500   0.5000  -0.5000
系数项:
```

可以写出 $Y(z)$ 的部分分式为

$$Y(z) = \frac{-4}{1-0.75z^{-1}} + \frac{2}{1-0.5z^{-1}} + \frac{-2}{1+0.5z^{-1}}$$

最后得到系统的输出序列为

$$y(n) = -4 \times 0.75^n u(n) + 2 \times 0.5^n u(n) - 2 \times (-0.5)^n u(n)$$

在 Matlab 程序中, `zeros(1,N)` 是产生一个包含 N 个零的函数。运行以下程序段可以计算系统的输出序列,并得到系统 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的图形,如图 3.11 所示。

```
>> nf = input('nf = ');           % 键入输出序列的终止时间(本例取 15)
n = 0; nf;                          % 求输出序列
y = (r(1)*p(1).^n + r(2)*p(2).^n + r(3)*p(3).^n) .* stepseq(0,0,nf);
subplot(2,1,1),
stem(n,[x,zeros(1,nf-nfx)])        % 画输入序列
xlabel('n'),ylabel('x(n)')
subplot(2,1,2),stem(n,y)           % 画输出序列
xlabel('n'),ylabel('y(n)')
```

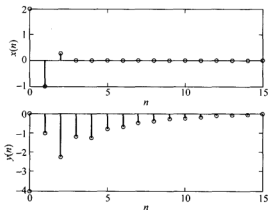


图 3.11 例 3.11 的系统零、极点分布

实际上,上述 Matlab 的实现方法有助于理解用系统函数求解系统的输出序列 $y(n)$ 。如果不需要得到输出序列表示式,可以直接利用第 1 章学习过的函数 `filter` 来实现系统求解。即

```
>> n = [0:15]; x = [2, -1, 0.25, zeros(1,13)];
b = -2; a = [1, -0.75, -0.25, 0.1875]; % 系统函数多项式的系数
y = filter(b,a,x); stem(n,y);
```


3.5.3 利用 Matlab 计算系统频率响应

Matlab 提供的函数 `freqz` 可以计算序列的傅里叶变换在给定离散频率点上的取样值。

设频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的有理多项式形式为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \cdots + b_M e^{-j\omega M}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \cdots + a_N e^{-j\omega N}}$$

则函数 `freqz` 共有五种调用方式,分别阐述如下。

$$(1) [H, w] = \text{freqz}(b, a, N)$$

其中,输入参数 b 和 a 分别表示 $H(e^{j\omega})$ 的分子和分母按降幂排列的多项式系数。此函数在单位圆上半部分等间隔地计算 N 个点处的频率响应,返回参数为系统的 N 点频率响应矢量 w 和 N 点复数频率响应矢量 H 。注意 N 的默认值为 512。

$$(2) H = \text{freqz}(b, a, w)$$

返回参数为矢量 w 指定的频率点上的频率响应,频率范围为 $0 \sim \pi$ 。

$$(3) H = \text{freqz}(b, a, F, Fs)$$

给定取样频率 F_s ,返回参数为矢量 F 指定的频率点上的复数频率响应,单位为 Hz。

$$(4) [H, w] = \text{freqz}(b, a, N, 'whole')$$

在整个单位圆上等间隔地计算 N 点频率响应,频率范围为 $0 \sim 2\pi$ 。

$$(5) [H, F] = \text{freqz}(b, a, N, Fs) \text{ 和 } [H, F] = \text{freqz}(b, a, N, 'whole', Fs)$$

给定单位为 Hz 的取样频率 F_s ,返回单位为 Hz 的频率矢量 F 。

在计算系统的频率响应时,还需要利用 Matlab 提供的函数 `abs`、`angle`、`real`、`imag` 等求傅里叶变换的幅度、相位以及实部和虚部。

例 3.12 已知系统的差分方程为 $y(n) - y(n-1) + 0.75y(n-2) = x(n)$,试画出系统的幅度响应和相位响应曲线。

解 根据给定的差分方程,可以确定频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的有理多项式系数 $b=[1]$, $a=[1, -1, 0.75]$ 。利用函数 `freqz` 等计算并画出系统的幅度响应和相位响应曲线,相应的程序为

```
>>b=[1]; a=[1, -1, 0.75]; N=512; % 系统函数多项式的系数
[H,w]=freqz(b,a,N,'whole'); % 计算频率响应
magH=abs(H(1:N)); % 计算幅度
phaH=angle(H(1:N)); % 计算相位
w=w(1:N);
subplot(2,1,1); % 画幅度响应曲线
plot(w/pi,magH); % 绘制连续曲线
grid; % 画网格
ylabel('Magnitude');
title('Magnitude Response');
```

```

subplot(2,1,2);                                % 画相位响应曲线
plot(w/pi,phaH);
grid;
xlabel('frequency Unit: pi'); ylabel('Phase');
title('Phase Response');

```

前面讨论过, $H(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 所以 Matlab 程序中用函数 plot 绘制连续曲线, 图 3.12 是频率在区间 $0 \sim 2\pi$ 中系统的幅度响应和相位响应曲线。

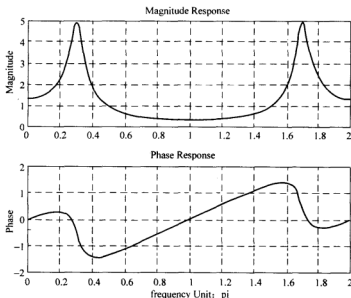


图 3.12 例 3.12 系统的频率响应曲线

习 题

3.1 已知因果线性时不变系统的输入为 $x(n) = u(-n-1) + 0.5^n u(n)$, 系统输出的 Z 变换为

$$Y(z) = \frac{-0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+z^{-1})}$$

试求其系统函数 $H(z)$ 。

3.2 一个线性时不变系统的差分方程为

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) - x(n-1)$$

(1) 求系统的单位脉冲响应;

(2) 求输入为 $x(n) = u(n) - u(n-10)$ 时的零状态响应。

3.3 已知系统函数 $H(z) = z/(z-k)$, 其中 k 为常数。

(1) 写出描述系统的差分方程;

(2) 求系统的频率响应,并画出 $k=0, 0.5, 1$ 三种情况下的幅度响应和相位响应曲线。

3.4 已知一个因果线性时不变系统有如下关系

$$\omega(n) = \beta\omega(n-1) + x(n), \quad y(n) = \omega(n) + \omega(n-1)$$

$\omega(n)$ 是描述系统内部的序列,试求

- (1) 系统函数 $H(z)$;
- (2) 系统的差分方程;
- (3) 系统的单位阶跃响应。

3.5 已知下列线性时不变系统的系统函数 $H(z)$ 分别为

$$\begin{aligned} (1) H(z) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} & (2) H(z) &= \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^4} \\ (3) H(z) &= \frac{(z-1)^3}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} & (4) H(z) &= \frac{\left(z - \frac{1}{3}\right)^4}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3} \end{aligned}$$

试确定其因果性和稳定性。

3.6 已知一个因果线性时不变系统的差分方程为

$$y(n] = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$,画出零极点分布图,并指出其收敛域;
- (2) 求系统的单位脉冲响应;
- (3) 分析系统的稳定性;
- (4) 求满足上述差分方程的一个稳定但非因果系统的单位脉冲响应。

3.7 已知一个线性时不变系统的差分方程为

$$y(n-1) - 2.25y(n) + y(n+2) = x(n)$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$,画出零极点分布图;
- (2) 确定系统的收敛域,并分析系统的因果性和稳定性;
- (3) 分析系统的零极点图,求系统单位脉冲响应的可能情况。

3.8 已知稳定系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{z-0.5}$$

- (1) 画出零极点分布图,并确定其收敛域;
- (2) 分析系统的因果性。

3.9 已知一个线性时不变系统的系统函数 $H(z)$ 在单位圆上收敛,试证明幅度平方函数 $|H(e^{j\omega})|^2$ 满足

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}$$

3.10 已知线性时不变系统用以下差分方程描述

$$y(n) = -0.25y(n-2) + x(n) + 0.5x(n-1)$$

且 $y(n)=0, n<0$ 。

- (1) 求系统函数 $H(z)$,画出零极点分布图;
- (2) 求系统的频率响应,画出幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 。

3.11 设一个因果的线性时不变系统满足差分方程

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

- (1) 求系统的单位脉冲响应;
- (2) 求输入为 $x(n) = e^{j\omega n}$ 时系统的响应;
- (3) 求系统的频率响应;
- (4) 求系统对输入 $x(n) = \cos(\pi n)$ 的响应。

3.12 已知下列系统的系统函数 $H(z)$ 分别为

$$(1) H(z) = \frac{1}{z-0.5} \quad (2) H(z) = \frac{z+0.5}{z}$$

试确定系统的零极点分布,并在 z 平面上用几何确定法画出幅度响应曲线。

3.13 一个因果的线性时不变系统由下列差分方程描述,即

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - bx(n-1)$$

试确定能使该系统成为全通系统的 b 值。

3.14 试证明全通系统函数

$$H_{sp}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < 1$$

在所有频率下都是单位增益的。即要求证明 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时, $|H_{sp}(e^{j\omega})| = 1$ 。

3.15 设一个线性时不变因果系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 为常数}$$

- (1) 问 a 在什么范围内才能使系统稳定?
- (2) 如果 $0 < a < 1$,画出零极点分布图,并用阴影表示收敛域;
- (3) 在 z 平面上用几何确定法证明系统是一个全通系统,即 $|H_{sp}(e^{j\omega})|$ 为常数。

3.16 已知一个 $\pi/2$ 移相器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

试求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

第4章

离散傅里叶变换

4.1 引言

前面讨论的 Z 变换和傅里叶变换是数字信号处理中常用的重要数学变换,但 Z 变换和傅里叶变换无法直接利用计算机进行数值计算。由于有限长序列具有“时域有限”这一特点,利用计算机可以进行数值计算,因此,有限长序列在数字信号处理的实际应用中就显得很重要。对于有限长序列,本章将讨论一种更为重要的变换,即离散傅里叶变换 DFT (discrete Fourier transform)。

离散傅里叶变换的实质是有限长序列傅里叶变换的有限点离散取样,从而使频域的离散化变换成为可能。DFT 不仅在理论上具有重要意义,而且有多种有效的快速算法,例如快速傅里叶变换算法,使得信号的实时处理和设备的简化等得以实现,因而离散傅里叶变换在数字信号处理的各种算法中起着重要的作用。

图 4.1 是各种形式的傅里叶变换。一个非周期实连续时间信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换,即频谱 $X_a(j\Omega)$ 是一个非周期的连续函数,其振幅特性如图 4.1(a) 所示。一个周期性连续时间信号 $x_p(t)$ 的频谱(指各次谐波分量)是非周期性的离散频率函数 $X_p(jk\Omega)$,振幅特性如图 4.1(b) 所示。一个非周期连续时间信号 $x_a(t)$ 经过等间隔取样的信号 $x(nT)$,其频率函数 $X(e^{j\omega})$ 是周期的连续函数,振幅特性如图 4.1(c) 所示。若频率轴用 Ω 表示,则频率函数的周期等于 $2\pi/T$,其中 T 为取样周期;若频率轴用 ω 表示,则频率函数的周期为 2π 。

事实上,信号的傅里叶变换在时域和频域上的离散性和周期性之间存在着对称关系。比较图 4.1(a)、4.1(b) 和 4.1(c) 可发现以下规律,即如果信号频域是离散的,则该信号在时域就表现为周期性的时间函数;相反,如果信号在时域上是离散的,则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。因此,如果时域信号不仅是离散的,而且是周期的,那么它一定具有既是周期又是离散的频谱,振幅特性如图 4.1(d) 所示,即时域和频域都是离散的、周期的。可以得出一般的规律:一个域的离散就必然造成另一个域的周期延拓。这种离散变换,本质上都是周期的。这就是前面介绍过的周期序列及其傅里叶级数。下面借助 DFS 讨论可作为周期序列的一个周期的、有限长序列的离散傅里叶变换 DFT。

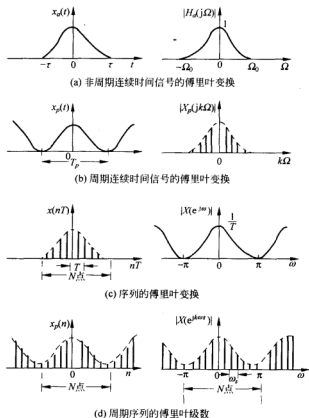


图 4.1 各种形式的傅里叶变换

4.2 离散傅里叶变换的定义

4.2.1 离散傅里叶变换的定义

前面 2.3 节讨论过,无限长的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 只需要用其中的一个周期 $x(n)$ 和 $X(k)$ 即可确定并完全表达出来。将式(2.76)和式(2.77)所表示的离散傅里叶级数中的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 换成其对应的序列 $x(n)$ 和 $X(k)$,表达式依然成立,这样就得到了任意有限长序列的变换对

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.1)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.2)$$

式中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, N 为 DFT 变换区间长度。式(4.1)称为离散傅里叶正变换(DFT),

式(4.2)称为离散傅里叶反变换(IDFT)。

例 4.1 设有限长序列为 $x(n)=R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的傅里叶变换, 以及 4 点、8 点、16 点 DFT。

解 (1) $x(n)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_4(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = e^{-j3\omega/2} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

(2) $x(n)$ 的 4 点 DFT

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 W_4^{kn} = \begin{cases} 4 & k=0 \\ 0 & k=1, 2, 3 \end{cases}$$

(3) $x(n)$ 的 8 点 DFT

$$\begin{aligned} X_2(k) &= \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{kn} = \sum_{n=0}^3 W_8^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k}, \quad k=0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

(4) $x(n)$ 的 16 点 DFT

$$\begin{aligned} X_3(k) &= \sum_{n=0}^{15} x(n) W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^3 W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{8}kn} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{16}k} \frac{\sin \frac{\pi}{4}k}{\sin \frac{\pi}{16}k}, \quad k=0, 1, \dots, 15 \end{aligned}$$

从图 4.2 可见, 同一序列不同点数的 DFT 是不相同的, 比较图 4.2(b)、图 4.2(c)、图 4.2(d)可以发现, 对原序列尾部补 1 倍、4 倍个零值后, 其 DFT 之间满足 $X_1(k) = X_2(2k) = X_3(4k) (k=0, 1, 2, 3)$, 即补零后增加的谱线只是有规律地插在频谱的一个周期内。

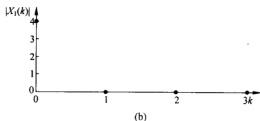
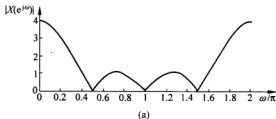


图 4.2 序列不同点 DFT 的比较

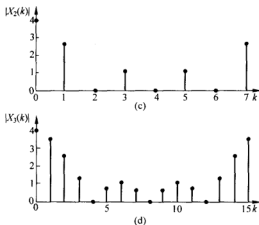


图 4.2(续)

4.2.2 DFT 和 Z 变换、序列的傅里叶变换的关系

设序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 Z 变换、DFT 和傅里叶变换分别为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

比较上面三式可得

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.3)$$

和

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.4)$$

式(4.3)表明, 序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 相当于是 在 $x(n)$ 的 Z 变换的单位圆上进行 N 点等间隔取样, 同时第一个取样点应取在 $z=1$ 处。在图 4.3 中标出了单位圆上的 8 个等间隔取样点。

式(4.4)则说明, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔取样。这就是 DFT 的物理意义。因此, DFT 的变换区间长度 N 不同, 表示对 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上的取样间隔和取样点数不同, 所以 DFT 的变换结果不同, 从例 4.1 也可以得出这一结论。

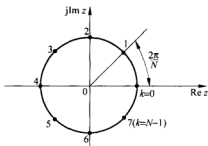


图 4.3 $N=8$ 时 z 平面单位圆上的等间隔取样

4.2.3 DFT 的隐含周期性

虽然离散傅里叶变换是对有限长序列进行定义的,但根据傅里叶变换时域、频域的对称关系,频域的离散化必然对应着时域序列本身的周期性。因此,一旦进行离散傅里叶变换,将认为原始序列必为周期的,这称为 DFT 的隐含周期性。前面定义的 DFT 变换对中, $x(n)$ 与 $X(k)$ 均为有限长序列,但由于 W_N^{kn} 的周期性,使式(4.1)和式(4.2)中的 $X(k)$ 具有隐含周期性,且周期均为 N 。对任意整数 m ,总有

$$W_N^k = W_N^{k+mN} \quad k, m, N \text{ 均为整数}$$

所以式(4.1)中, $X(k)$ 满足

$$\begin{aligned} X(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k) \end{aligned}$$

同理可证明式(4.2)中,

$$x(n+mN) = x(n)$$

实际上,任何周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 都可以看作长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓序列,而 $x(n)$ 则是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期,即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n+mN) \quad (4.5)$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n) \quad (4.6)$$

上述关系如图 4.4 所示。一般情况下,对于周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$,将 n 的取值在 $0 \leq n \leq N-1$ 之间的范围称为 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间,相应地,主值区间上的序列称为 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。因此, $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列,而 $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓序列。为方便叙述,式(4.5)可表示为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (4.7)$$

式中, $x((n))_N$ 表示 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列, $((n))_N$ 表示 n 对 N 取余数,即如果

$$n = mN + n_1$$

其中, $0 \leq n_1 \leq N-1$, m 为整数,则 $((n))_N = n_1$,即 n 对 N 的余数为 n_1 。例如,图 4.4 中 $N=8$, $\tilde{x}(n) = x((n))_8$,则有

$$\tilde{x}(-1) = x((-1))_8 = x(7), \quad \tilde{x}(9) = x((9))_8 = x(1)$$

需要指出,对有限长序列进行周期延拓时,延拓的周期 N 非常重要, N 不同,延拓得到的周期序列也不相同。如果 $x(n)$ 的长度为 N ,且 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$,则 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数可表示为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (4.8)$$

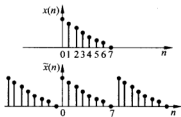


图 4.4 有限长序列及其周期延拓

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn} \quad (4.9)$$

式中

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot R_N(k) \quad (4.10)$$

为 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。将式(4.8)和式(4.9)与 DFT 定义式(4.1)和式(4.2)比较可知,有限长序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$,正好是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的离散傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。

4.3 离散傅里叶变换的基本性质

本节讨论 DFT 的一些性质,假定序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是有限长序列,且设

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)], \quad X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$$

4.3.1 线性性质

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个有限长序列,长度分别为 N_1 和 N_2 ,且

$$Y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

式中, a, b 为任意常数,取 $N = \max[N_1, N_2]$,则 $y(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = aX_1(k) + bX_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.11)$$

其中, $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点 DFT。

需要指出,如果 N_1 和 N_2 不相等,以 N 为 DFT 变换长度时,则将相对较短的序列尾部补零增加到长度为 N 。例如,若 $N_1 < N_2$,则 $X_1(k)$ 就是序列 $x_1(n)$ 增补 $N_2 - N_1$ 个零后的 N_2 点 DFT,相应地, $Y(k)$ 的长度也为 N_2 。

4.3.2 循环移位性质

1. 序列的循环移位

设 $x(n)$ 为有限长序列,长度为 N ,则 $x(n)$ 的循环移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (4.12)$$

式(4.12)表示,将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓得到 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$,然后将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 移位得到 $\tilde{x}(n+m)$, $\tilde{x}(n+m)$ 仍旧是一个周期为 N 的序列,最后取 $\tilde{x}(n+m)$ 的主值序列,则得到有限长序列 $x(n)$ 的循环移位序列 $y(n)$ 。

$x(n)$ 及其循环移位过程如图 4.5 所示。分析图中的序列移位时,只观察 $n=0$ 到 $N-1$ 这一区间,可以发现,循环移位的实质是将 $x(n)$ 左移 m 位,左侧移出主值区的序列值又依次从右侧进入主值区,因此,称为“循环移位”。显然,移位后得到的序列 $y(n)$ 仍是长度为 N 的有限长序列。

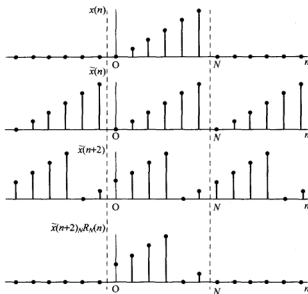


图 4.5 循环移位过程示意图

2. 时域循环移位定理

设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $y(n)$ 为 $x(n)$ 的循环移位, 即

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = W_N^{-km} X(k) \quad (4.13)$$

其中, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$ 。

证明

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn} \end{aligned}$$

令 $n+m=n'$, 则有

$$Y(k) = \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)} = W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'}$$

式中求和项 $x((n'))_N W_N^{kn'}$ 以 N 为周期, 所以对其在任一周期上的求和结果相同。将上式的求和区间改在主值区, 则得

$$Y(k) = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'} = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} = W_N^{-km} X(k)$$

3. 频域循环移位定理

如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$, $Y(k) = X((k+l))_N R_N(k)$, 则

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = W_N^N x(n) \quad (4.14)$$

式(4.14)的证明方法与时域循环移位定理类似,直接对 $Y(k) = X((k+l))_N R_N(k)$ 进行 IDFT 即可得证。

4.3.3 循环卷积定理

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 N_1 和 N_2 , $N = \max[N_1, N_2]$ 。如果 $X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$, 则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \quad (4.15)$$

或

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n)$$

证明 直接对式(4.15)两边进行 DFT, 即

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N W_N^{kn} \end{aligned}$$

令 $n-m=n'$, 则有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n'=n-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \sum_{n'=n-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{kn'} \end{aligned}$$

式中 $x_2((n'))_N W_N^{kn'}$ 以 N 为周期, 所以对其在任一周期上的求和结果不变。因此

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \cdot \sum_{n'=0}^{N-1} x_2(n') W_N^{kn'} \\ &= X_1(k) \cdot X_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

式(4.15)的循环卷积过程如图 4.6 所示。循环卷积计算过程中, 求和变量为 m, n 为参变量。首先将 $x_2(m)$ 进行周期延拓, 得到 $x_2((m))_N$, 再反转形成 $x_2((-m))_N$, 通常称之为 $x_2(m)$ 的循环反转。对 $x_2(m)$ 的循环反转序列循环移位 n , 形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$, 当 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 分别将 $x_1(m)$ 与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘, 并对 m 在 $[0, N-1]$ 区间上求和, 便得到 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的循环卷积 $x(n)$ 。

由于循环卷积过程中, 要求对 $x_2(m)$ 循环反转、循环移位, 卷积得到的序列长度还是为 N 。显然与一般的线性卷积不同, 故称为循环卷积。循环卷积可记为 \otimes , 当两个长度为 N 的序列求循环卷积时, 也可记为 \otimes 。因此

$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

由于

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_1(k) \cdot X_2(k) = X_2(k) \cdot X_1(k)$$

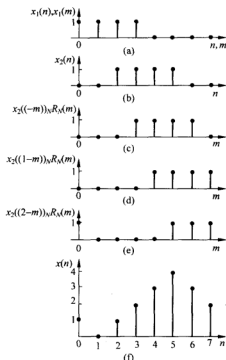


图 4.6 循环卷积过程

所以

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n)$$

即循环卷积满足交换率。

根据对称性原理,如果 $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l)_N R_N(k)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

或

$$X(k) = \frac{1}{N} X_2(k) \otimes X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l)_N R_N(k))$$

称式(4.16)为频域循环卷积定理,同理可称式(4.15)为时域循环卷积定理。

4.3.4 复共轭序列的 DFT

设 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的复共轭序列,长度为 N , $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.17)$$

且

$$X(N) = X(0)$$

证明 根据 DFT 的惟一性,只要证明式(4.17)右边等于左边即可。

$$\begin{aligned} X^*(N-k) &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{-(N-k)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \text{DFT}[x^*(n)] \end{aligned}$$

又由于 $X(k)$ 具有隐含周期性,因此有

$$X(N) = X(0)$$

用同样的方法可以证明

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k) \quad (4.18)$$

4.3.5 DFT 的共轭对称性

在 2.3 节已讨论了序列傅里叶变换的对称性,其对称性是关于坐标原点的纵坐标的对称性,DFT 也有类似的对称性。但在 DFT 中涉及的序列 $x(n)$ 及其 $X(k)$ 均为有限长序列,且取值区间均为 $[0, N-1]$,为此需要对有限长序列共轭对称的相关概念重新定义。

1. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

对于有限长序列,如果满足

$$x_{\text{ep}}(n) = x_{\text{ep}}^*(N-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.19)$$

$$x_{\text{op}}(n) = -x_{\text{op}}^*(N-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.20)$$

则 $x_{\text{ep}}(n)$ 为共轭对称序列, $x_{\text{op}}(n)$ 为共轭反对称序列。当 N 为偶数时,将上式中的 n 换为 $N/2-n$,可以得到

$$x_{\text{ep}}\left(\frac{N}{2}-n\right) = x_{\text{ep}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right) \quad 0 \leq n \leq N/2-1$$

$$x_{\text{op}}\left(\frac{N}{2}-n\right) = -x_{\text{op}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right) \quad 0 \leq n \leq N/2-1$$

上式更清楚地说明了有限长序列共轭对称的含义。图 4.7 所示为共轭对称与共轭反对称序列示意图。图中, * 号为序列取共轭后的值。

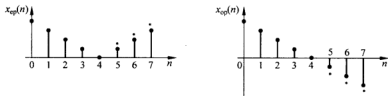


图 4.7 共轭对称与共轭反对称序列示意图

如同任何实函数都可以分解成偶对称分量和奇对称分量一样,任何有限长序列 $x(n)$ 都可表示成其共轭对称分量和共轭反对称分量之和,即

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.21)$$

将上式中的 n 换成 $N-n$,并取复共轭,再将式(4.19)和式(4.20)代入,得到

$$x^*(N-n) = x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) = x_{ep}(n) - x_{op}(n) \quad (4.22)$$

式(4.21)分别加减式(4.22)可得

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad (4.23)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \quad (4.24)$$

同理可得

$$X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \quad (4.25)$$

$$X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \quad (4.26)$$

其中 $X_{ep}(k)$ 和 $X_{op}(k)$ 分别表示有限长序列 $X(k)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量。

2. DFT 的共轭对称性

(1) 设有限长序列 $x(n)$ 是一复序列, $x_r(n)$ 和 $jx_i(n)$ 分别表示 $x(n)$ 的实部和虚部, 即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \quad (4.27)$$

则

$$x_r(n) = \operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_i(n) = j\operatorname{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

由式(4.17)、式(4.23)和式(4.25)可得

$$\operatorname{DFT}[x_r(n)] = \frac{1}{2}\operatorname{DFT}[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k)$$

由式(4.17)、式(4.24)和式(4.26)可得

$$\operatorname{DFT}[jx_i(n)] = \frac{1}{2}\operatorname{DFT}[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

根据 DFT 的线性性质可得

$$X(k) = \operatorname{DFT}[x(n)] = X_{ep}(k) + X_{op}(k) \quad (4.28)$$

式中, $X_{ep}(k) = \operatorname{DFT}[x_r(n)]$ 是 $X(k)$ 的共轭对称分量; $X_{op}(k) = \operatorname{DFT}[jx_i(n)]$ 是 $X(k)$ 的共轭反对称分量。

(2) 如果将有限长复序列 $x(n)$ 分解为共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 表示, 即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.29)$$

由式(4.18)可得

$$\operatorname{DFT}[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}\operatorname{DFT}[x(n) + x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \operatorname{Re}[X(k)]$$

$$\operatorname{DFT}[x_{op}(n)] = \frac{1}{2}\operatorname{DFT}[x(n) - x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = j\operatorname{Im}[X(k)]$$

因此

$$X(k) = \operatorname{DFT}[x(n)] = \operatorname{DFT}[x_{ep}(n)] + \operatorname{DFT}[x_{op}(n)] = X_R(k) + jX_I(k)$$

式中, $X_R(k) = \operatorname{DFT}[x_{ep}(n)]$, 为 $X(k)$ 的实部; $X_I(k) = \operatorname{DFT}[x_{op}(n)]$, 为 $X(k)$ 的虚部。

综上所述, 可总结出 DFT 的共轭对称性质: 如果序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$, 则 $x(n)$ 的

实部和虚部(包括 j)的 DFT 分别为 $X(k)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量;而 $x(n)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量的 DFT 分别为 $X(k)$ 的实部和虚部乘以 j 。

设 $x(n)$ 是长度为 N 的实序列,且 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$,则

(1) $X(k)$ 共轭对称,即

$$X(k) = X^*(N-k) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.30)$$

(2) 如果 $x(n)=x(N-n)$,则 $X(k)$ 实偶对称,即

$$X(k) = X(N-k) \quad (4.31)$$

(3) 如果 $x(n)=-x(N-n)$,则 $X(k)$ 纯虚奇对称,即

$$X(k) = -X(N-k) \quad (4.32)$$

利用上述性质,可减少 DFT 运算量,提高运算效率。例如,计算实序列的 N 点 DFT 时,当 N 为偶数时,只需计算前面 $N/2+1$ 点;而 N 为奇数时,只需计算前面 $(N+1)/2$ 点,其他点按照式(4.30)即可求得,如 $X(N-1)=X^*(1)$, $X(N-2)=X^*(2)$,这样可减少近一半的运算量。

利用 DFT 的共轭对称性,通过计算一个 N 点 DFT,可以得到两个不同的实序列的 N 点 DFT。设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个实序列,构成新序列

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

对复序列 $x(n)$ 进行 DFT,得到

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_{\text{ep}}(k) + jX_{\text{op}}(k)$$

由 DFT 的共轭对称性,可以很容易求得 $X_1(k)=X_{\text{ep}}(k)$ 和 $X_2(k)=-jX_{\text{op}}(k)$ 。

4.4 频域取样

频域取样是指对序列的傅里叶变换或系统的频率特性进行取样。由时域取样定理可知,在一定的条件下,可以通过时域离散取样信号恢复原来的连续信号。对有限长序列而言,由 DFT 的讨论可知,DFT 是在频域内对序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的等间隔取样,即实现了频域取样。而且还可以利用内插公式由 $X(k)$ 恢复原来的连续谱信号,即频率函数 $X(e^{j\omega})$ 。下面讨论频域取样的条件以及取样后获得的频率特性。

4.4.1 频域取样

设任意长序列 $x(n)$ 绝对可和,其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

由于序列绝对可和, $X(z)$ 的收敛域包括单位圆,即 $x(n)$ 存在傅里叶变换。如果在单位圆上对 $X(z)$ 进行 N 点等间隔取样,则得

$$\begin{aligned} X(k) &= X(z) \big|_{z=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)W_N^{nk} \\ &= X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

式(4.33)表示在区间 $[0, 2\pi]$ 上对 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的 N 点等间隔取样。

如果将 $X(k)$ 看作是长度为 N 的有限长序列 $x_N(n)$ 的 DFT,即

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

那么,实现频率取样后信息有无丢失的问题,实际上可以通过对比恢复出的时域序列 $x_N(n)$ 与原始序列之间 $x(n)$ 的关系而得到确定。因此,频率取样后信息有无丢失的问题就转换为能否利用取样值 $X(k)$ 恢复出原始时域信号 $x(n)$ 的问题。

下面推导序列 $x_N(n)$ 与原始序列 $x(n)$ 之间的关系,并导出频域取样定理。首先定义

$$\tilde{x}_N(n) = x_N((n))_N$$

根据有限长序列的 DFT 和 DFS 的关系可知, $X(k)$ 是 $x_N(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列的离散傅里叶系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N = \text{DFS}[\tilde{x}_N(n)]$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot R_N(k)$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn}$$

将频率取样值即式(4.33)代入上式,得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{kn} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}$$

式中, $x(m)$ 也就是原始序列 $x(n)$, 由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN (r \text{ 为整数}) \\ 0 & \text{其他 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) \quad (4.34)$$

式(4.34)表明, $\tilde{x}_N(n)$ 是原始序列 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列。前面讨论过,时域的取样造成频域的周期延拓,现在又证明了频域上的取样同样也造成时域的周期延拓。这正是傅里叶变换在时域和频域之间对称关系的反映。 $\tilde{x}_N(n)$ 的主值序列为

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) \right] R_N(n) \quad (4.35)$$

设序列 $x(n)$ 的长度为 M , 如果取样点数 $N \geq M$, 那么 $x(n)$ 的周期延拓不会产生混叠。但是,当频域取样点数 $N < M$ 时,即频域的取样间隔不够密, $x(n)$ 的周期延拓就会在一些点上出现交叠,产生时域混叠现象,这样就不可能从 $\tilde{x}_N(n)$ 中提取一个周期不失真地恢复出原序列 $x(n)$ 来。当 $x(n)$ 是无限长序列时,无论 N 取什么值, $\tilde{x}_N(n)$ 都不可能完全消除混叠误差,只能随着取样点数 N 的增加而逐渐接近 $x(n)$ 。

因此,对于长度为 M 的序列 $x(n)$,频域取样不失真的条件是,取样点数 N 应大于或等于原始序列的长度 M 。只有当频域取样点数 $N \geq M$ 时,才能从 $\tilde{x}_N(n)$ 不失真地恢复出 $x(n)$, 这时有

$$x(n) = x_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn} \quad (4.36)$$

这就是所谓的频域取样定理。

4.4.2 $X(z)$ 的内插公式

设序列 $x(n)$ 的长度为 N , 根据频域取样定理, 在 $X(z)$ 单位圆上等间隔取样 N 点, 可以从 $X(k)$ 无失真地恢复 $x(n)$, 因而这 N 个 $X(k)$ 也应该能完全表达整个 $X(z)$ 函数及频率响应 $X(e^{j\omega})$ 。

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(k) = X(z) \big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

由于 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$, 代入 $X(z)$ 的表达式中得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

式中 $W_N^{-kN} = 1$, 因此

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (4.37)$$

令

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (4.38)$$

则

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z) \quad (4.39)$$

式(4.39)称为用 $X(z)$ 在单位圆上的 N 个等间隔取样值表示 $X(z)$ 的内插公式, $\varphi_k(z)$ 称为内插函数。将 $z = e^{j\omega}$ 代入式(4.38)和式(4.39), 得到傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的内插函数和内插公式, 即

$$\varphi_k(\omega) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{N})}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(\omega)$$

进一步化简, 可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \quad (4.40)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (4.41)$$

在数字滤波器的结构与设计中将会看到, 频域取样理论以及有关公式可提供一种有用的滤波器结构和滤波器设计途径。

4.5 离散傅里叶变换的应用

第5章将介绍DFT的快速算法FFT。快速傅里叶变换算法的出现,使得DFT在数字通信、语音信号处理、图像处理、功率谱估计、雷达理论、医学、地震以及数字分析等各个领域得到了广泛应用。然而,各种应用一般都以卷积和相关运算为依据,或者以DFT作为连续傅里叶变换的近似为基础。所以,本节主要介绍用DFT计算线性卷积的基本原理,以及用DFT对连续信号和序列进行谱分析等最基本的应用,这些都是用DFT解决数字滤波和系统分析问题的基础。

4.5.1 用DFT计算线性卷积

在许多实际的问题中常需要计算线性卷积,例如一个数字滤波器的输出等于输入与滤波器单位取样响应的线性卷积。如果能够将线性卷积转化为循环卷积,那么根据DFT的循环卷积性质,就能够用循环卷积来计算线性卷积,而循环卷积可以用FFT进行快速计算,这样就可以加快卷积计算的速度。

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 L 的有限长因果序列,其循环卷积为

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L R_L(n)$$

且

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$$

其中, $0 \leq k \leq L-1$ 。则由时域循环卷积定理有

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = X_1(k) \cdot X_2(k), \quad 0 \leq k \leq L-1$$

由此可见,循环卷积既可以在时域中直接计算,也可以按照如图4.8所示的计算框图在频域中计算。由于DFT有快速算法FFT,当 L 很大时在频域中计算的速度快得多,因而常用DFT计算循环卷积。

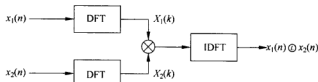


图 4.8 用 DFT 计算循环卷积

由于DFT只能直接用来计算循环卷积,因此,需要讨论在什么条件下循环卷积与线性卷积相等的问题。假设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 都是有限长序列,长度分别是 N 和 M ,它们的线性卷积和循环卷积分别表示为

$$y_1(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m) \quad (4.42)$$

$$y_2(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n) \quad (4.43)$$

其中, $L \geq \max[N, M], x((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rL)$, 所以

$$y_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-m+rL) R_L(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n+rL-m) R_L(n)$$

对照式(4.42)可以看出, 上式中

$$\sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n+rL-m) = y_1(n+rL)$$

即

$$y_2(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1(n+rL) R_L(n) \quad (4.44)$$

式(4.44)表明, $y_2(n)$ 等于 $y_1(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。由于卷积 $y_1(n)$ 的长度为 $N+M-1$, 当 $L < N+M-1$ 时, $y_1(n)$ 的周期延拓必有一部分序列值相重叠, 从而产生混叠失真。因此, 只有当循环卷积长度 $L \geq N+M-1$ 时, 以 L 为周期的周期延拓才不会出现混叠现象, 此时取主值序列显然满足 $y_2(n) = y_1(n)$ 。由此得出结论: 两个长度分别为 N 和 M 的序列, 其线性卷积可用长度为 L 的循环卷积来代替, 但必须满足条件

$$L \geq N+M-1$$

图 4.9 中画出了 $h(n)$ 、 $x(n)$ 、 $h(n) * x(n)$ 和 L 分别取 6、8、10 时 $h(n) \oplus x(n)$ 的波形。由于 $h(n)$ 长度 $N=4$, $x(n)$ 长度 $M=5$, $N+M-1=8$, 所以只有 $L \geq 8$ 时, $h(n) \oplus x(n)$ 的波形才与 $h(n) * x(n)$ 相同。

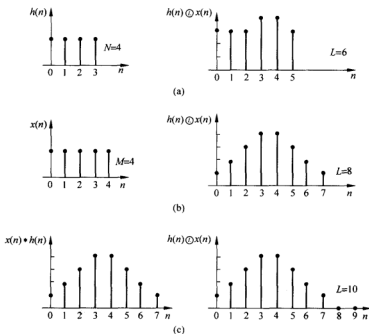


图 4.9 线性卷积与循环卷积

如果取 $L = N+M-1$, 则可用 DFT 计算线性卷积, 计算框图如图 4.10 所示。其中 DFT 和 IDFT 通常用快速算法(FFT)来实现, 故常称其为快速卷积。

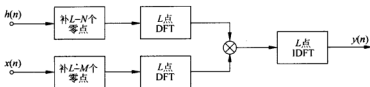


图 4.10 用 DFT 计算线性卷积的框图

实际应用中经常会遇到两个长度相差很大的序列进行线性卷积,例如 $M \gg N$ 。如果选取 $L = N + M - 1$,以 L 为运算区间,用上述快速卷积法计算线性卷积,则要求对短序列补很多零点,将长序列全部输入存储起来后才能进行快速计算。因此,要求存储容量很大,运算量大,时延也不允许。在某些场合,序列长度不定或者认为是无限长,如语音信号或地震信号等,往往要求随时接收随时进行处理。在这些要求实时处理的情况下,直接套用上述方法是不行的。解决的方法是将长序列分段,每一段分别与短序列进行卷积,这就是分段处理。分段处理一般有重叠相加法和重叠保留法两种,这里只介绍重叠相加法。

设序列 $h(n)$ 长度为 N , $x(n)$ 为无限长序列。将 $x(n)$ 均匀分段,每段长度为 M ,则

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

式中, $x_k(n) = x(n) \cdot R_M(n - kM)$ 。于是, $h(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积可表示为

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \quad (4.45)$$

式中, $y_k(n) = h(n) * x_k(n)$ 为第 k 段线性卷积的结果。式(4.45)说明,计算 $h(n)$ 与 $x(n)$ 线性卷积时,可先将 $x(n)$ 的每一段 $x_k(n)$ 分别与 $h(n)$ 进行线性卷积,然后再将分段卷积结果 $y_k(n)$ 重叠相加,如图 4.11 所示。

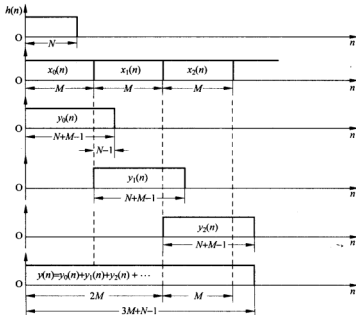


图 4.11 重叠相加法卷积示意图

由于每一分段卷积 $y_k(n)$ 的长度为 $N+M-1$, 因此, $y_k(n)$ 的后部分与 $y_{k+1}(n)$ 的前部分有 $N-1$ 个点重叠, 因此, 式(4.45)中的求和并不是将各段线性卷积的结果简单地拼接在一起, 必须把重叠部分的 $y_k(n)$ 与 $y_{k+1}(n)$ 相加, 才能得到完整的卷积序列 $y(n)$ 。显然可用快速卷积计算分段卷积, 快速卷积的运算区间 $L=N+M-1$ 。由图 4.11 可见, 当第二个分段卷积 $y_1(n)$ 计算完后, 叠加重叠点便可得到输出序列 $y(n)$ 前 $2M$ 个值。同样道理, 分段卷积 $y_i(n)$ 计算完后, 就可得到 $y(n)$ 第 i 段的 M 个序列值。因此, 这种方法不要求大的存储容量, 且运算量和时延也大大减少。

4.5.2 用 DFT 对连续信号进行谱分析

利用 DFT 可以实现对信号的谱分析是人们感兴趣的主要原因之一。所谓信号的谱分析, 就是计算信号的傅里叶变换。由于实际的信号可能为连续信号和离散信号, 因此, 从本节开始分别讨论利用 DFT 对连续信号和离散信号进行谱分析的基本原理和方法。

在工程实际中经常遇到连续信号, 这种信号在时域和频域都是连续的, 因此, 无法利用计算机进行谱分析。而 DFT 是一种时域和频域均离散化的变换, 适合数值计算, 因而成为分析离散信号和系统的有力工具。对连续信号和系统, 可以通过时域取样, 应用 DFT 进行谱分析。首先要对连续信号 $x_a(t)$ 进行时域取样, 得到 $x(n)=x_a(nT)$; 再对 $x(n)$ 进行 DFT 得到 $X(k)$, 实现了对 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔取样。显然, 这里的 $x(n)$ 和 $X(k)$ 均为有限长序列。

然而, 由傅里叶变换理论知道, 若信号持续时间有限长, 则频谱无限宽; 若信号频谱有限宽, 则持续时间无限长。所以严格地讲, 持续时间有限的带限信号是不存在的。因此, 按取样定理取样时, 会出现频谱混叠失真, 或取样序列无限长, 不满足 DFT 的条件。实际上对于频谱很宽的信号, 为防止时域取样后产生频谱混叠失真, 可用预滤波器滤除幅度很小的高频成分, 使连续信号的带宽小于折叠频率; 对于持续时间长的信号, 取样点数太多以至无法存储和计算, 只好截取有限点进行 DFT。由上述可见, 用 DFT 对连续信号进行谱分析必然是近似的, 其近似程度与信号带宽、取样频率和截取长度有关。从工程角度看, 滤除幅度很小的高频成分和截取幅度很小的部分时间信号是允许的。因此, 在下面的分析中, 假设 $x_a(t)$ 是经过预滤波和截取处理的有限长带限信号。

设连续时间信号 $x_a(t)$ 持续时间为 T_p , 最高频率为 f_c , 如图 4.12(a) 所示。 $x_a(t)$ 的傅里叶变换为

$$X_a(jf) = \mathcal{F}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

对 $x_a(t)$ 以取样间隔 $T \leq 1/(2f_c)$ (即 $f_s = 1/T \geq 2f_c$) 取样得 $x(n) = x_a(nT)$ 。设共取样 N 点, 并对 $X_a(jf)$ 作零阶近似 ($t = nT, dt = T$), 得

$$\hat{X}_a(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT}$$

显然, $\hat{X}_a(jf)$ 仍是 f 的连续周期函数, 如图 4.12(b) 所示。对 $\hat{X}_a(jf)$ 在区间 $[0, f_s]$ 上等间隔取样 N 点, 取样间隔为 F , 如图 4.12(c) 所示。参数 f_s, T_p, N 和 F 满足如下关系:

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} \quad (4.46)$$

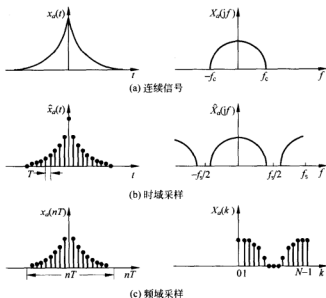


图 4.12 用 DFT 计算连续信号频谱原理

由于 $NT = T_p$, 所以

$$F = \frac{1}{T_p} \quad (4.47)$$

将 $f = kF$ 和式(4.46)代入 $\hat{X}_a(jf)$, 可得取样为

$$\hat{X}(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令 $X_a(k) = \hat{X}(jkF)$, $x(n) = x_a(nT)$, 则

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (4.48)$$

用同样的方法, 由

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$$

可以推出

$$\begin{aligned} x(n) = x_a(nT) &= F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= FN \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \\ &= \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

式(4.48)表明, 连续信号的频谱特性可以通过对连续信号取样、进行 DFT 的结果 $X_a(k)$ 再乘以 T 的近似方法得到。由式(4.49)可知, 时域取样信号可以通过对 $X_a(k)$ 的 IDFT 除以 T 得到。因此, 根据式(4.48)和式(4.49), 就可以通过 DFT 计算, 用 $x(n)$ 的频谱来近似 $X_a(jf)$ 。

对持续时间有限的带限信号,在满足时域取样定理时,上述分析方法不丢失信息,即可由 $X_a(k)$ 恢复 $X_a(jf)$ 或 $x_a(t)$,但直接由分析结果 $X_a(k)$ 却看不到 $X_a(jf)$ 的全部频谱特性,而只能看到 N 个离散取样点的谱频特性,这就是所谓的栅栏效应。如果 $x_a(t)$ 持续时间无限长,上述分析中要进行截断处理,所以会产生频率混叠和泄露现象,从而使谱分析产生误差。下面将讨论上述问题产生的原因及改进措施。

理想低通滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 及其频率响应函数 $H_a(jf)$ 如图 4.13(a) 和图 4.13(b) 所示。图中,

$$h_a(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

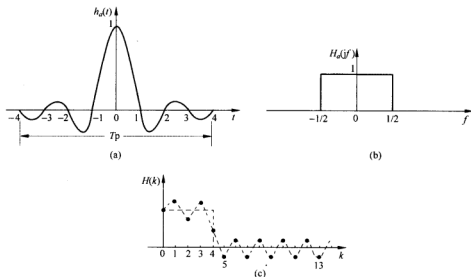


图 4.13 用 DFT 计算理想低通滤波器频率响应特性

现在用 DFT 来分析 $h_a(t)$ 的频率响应特性。由于 $h_a(t)$ 的持续时间为无穷长,所以要截取一段 T_p ,假设 $T_p=8\text{s}$,取样间隔 $T=0.25\text{s}$ (即取样频率 $f_s=4\text{Hz}$),取样点数 $N=T_p/T=32$;此时,频域取样间隔 $F=1/NT=0.125\text{Hz}$,则

$$H(k) = T \cdot \text{DFT}[h(n)], \quad 0 \leq k \leq 31$$

其中, $h(n)=h_a(nT)$ 。

$H(k)$ 的曲线如图 4.13(c) 所示。由图 4.13(c) 可见,低频部分近似理想低通频率响应特性,而高频误差较大,且整个频率响应都有波动。这些差别就是由于对 $h_a(t)$ 截断所产生的。为减少这种截断误差,可适当地加长 T_p ,增加取样点数 N ,或用窗函数处理后再进行 DFT。

在对连续信号进行谱分析时,主要关心谱分析范围和频率分辨率。谱分析范围受取样速率 f_s 的限制。为了不产生频率混叠失真,通常要求信号的最高频率 $f_c < f_s/2$ 。频率分辨率用取样间隔 F 来描述,表示谱分析中能够分辨的两个频谱分量的最小间隔。显然 F 越小谱分析就越接近 $X_a(jf)$,所以 F 较小时,就称频率分辨率较高。

下面讨论用 DFT 对连续信号谱分析的参数选择原则。

在已知信号最高频率 f_c (即谱分析范围) 时, 为了避免在 DFT 运算中发生频率混叠现象, 要求取样速率 f_s 满足下式:

$$f_s > 2f_c \quad (4.50)$$

按照式(4.46), 谱分辨率 $F=f_s/N$, 如果保持取样点数 N 不变, 要提高谱的分辨率, 必须降低取样频率, 取样频率的降低会引起谱分析范围减少。如维持 f_s 不变, 为提高谱的分辨率可以增加取样点数 N , 因为 $NT=T_p$, $T=1/f_s$, 只有增加对信号的观察时间 T_p , 才能增加 N 。 T_p 和 N 可按照下式选择:

$$N > \frac{2f_c}{F}, \quad T_p \geq \frac{1}{F}$$

例 4.2 对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 10\text{Hz}$, 信号最高频率 $f_c = 2.5\text{kHz}$ 。试确定最小记录时间 T_{\min} , 最大取样间隔 T_{\max} , 最少取样点数 N_{\min} 。如果 f_c 不变, 要求谱分辨率增加一倍, 最少的取样点数和最小记录时间是多少?

解
$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1\text{s}$$

因此, $T_{\min} = 0.1\text{s}$, 因为要求 $f_s > 2f_c$, 所以

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2500} = 0.2 \times 10^{-3}\text{s}$$

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{10} = 500$$

为使频率分辨率提高一倍, $F = 5\text{Hz}$, 要求

$$N_{\min} = \frac{2 \times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{\min} = \frac{1}{5} = 0.2\text{s}$$

为使用 DFT 的快速算法 FFT, 希望 N 符合 2 的整数幂, 为此选用 $N = 1024$ 。

总之, 为了提高谱分辨率, 同时又要照顾到谱分析范围不减少, 必须增长记录时间, 增加取样点数。应当注意, 这种提高谱分辨率的条件是时域取样必须满足取样定理, 甚至选取样速率 f_s 为信号最高频率 f_c 的 3~5 倍更好。

4.5.3 用 DFT 对序列进行谱分析

已知单位圆上的 Z 变换就是序列的傅里叶变换, 即

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

$X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续周期函数。如果对序列 $x(n)$ 进行 N 点 DFT, 得到 $X(k)$, $X(k)$ 是在区间 $[0, 2\pi]$ 上对 $X(e^{j\omega})$ 的 N 点等间隔取样, 则序列的傅里叶变换可利用 DFT 来计算。

对周期为 N 的周期序列 $\bar{x}(n)$, 其频谱函数为

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[\bar{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

其中

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\bar{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由于 $\tilde{X}(k)$ 以 N 为周期, 所以 $X(e^{j\omega})$ 也是以 N 为周期的离散谱, 每个周期有 N 条谱线, 第 k 条谱线位于 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处, 代表 $\tilde{x}(n)$ 的 k 次谐波分量; 而且, 谱线的相对大小与 $\tilde{X}(k)$ 成正比。

由此可见, 周期序列的频谱结构可用其离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ 表示。由 DFT 的隐含周期性可知, 截取 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列 $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$, 进行 N 点 DFT 得到

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[\tilde{x}(n)R_N(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

所以可用 $X(k)$ 表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构。

如果截取长度 M 等于 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期, 即 $M = mN$ (m 为正整数), 则

$$\begin{aligned} x_M(n) &= \tilde{x}(n) \cdot R_M(n) \\ X_M(k) &= \text{DFT}[x_M(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, mN-1 \end{aligned}$$

令 $n = n' + rN, r = 0, 1, \dots, m-1, n' = 0, 1, \dots, N-1$, 则

$$\begin{aligned} X_M(k) &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + rN) e^{-j\frac{2\pi}{mN}(n' + rN)k} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}n'k} \right] e^{-j\frac{2\pi}{m}rk} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} X\left(\frac{k}{m}\right) e^{-j\frac{2\pi}{m}rk} = X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}rk} \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}rk} = \begin{cases} m & k/m = \text{整数} \\ 0 & k/m \neq \text{整数} \end{cases}$$

所以

$$X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right) & k/m = \text{整数} \\ 0 & k/m \neq \text{整数} \end{cases}$$

由此可见, $X_M(k)$ 也能表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构, 只是在 $k = rm$ 时, $X_M(rm) = m\tilde{X}(r)$, 表示 $\tilde{x}(n)$ 的 r 次谐波谱线, 其幅度扩大 m 倍; 而其他 k 值时, $X_M(k) = 0$ 。当然, $X(r)$ 与 $X_M(rm)$ 对应点频率是相等的。所以, 只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行 DFT, 就可得到它的频率结构, 达到谱分析的目的。

如果 $\tilde{x}(n)$ 的周期预先不知道, 可截取 M 点进行 DFT, 即

$$\begin{aligned} x_M(n) &= \tilde{x}(n) \cdot R_M(n) \\ X_M(k) &= \text{DFT}[x_M(n)], \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

再将截取长度扩大一倍, 截取

$$\begin{aligned} x_{2M}(n) &= \tilde{x}(n) \cdot R_{2M}(n) \\ X_{2M}(k) &= \text{DFT}[x_{2M}(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 2M-1 \end{aligned}$$

比较 $X_M(k)$ 和 $X_{2M}(k)$, 如果二者的主谱差别满足分析误差要求, 则可以用 $X_M(k)$ 或 $X_{2M}(k)$ 近似表示 $\bar{x}(n)$ 的频谱; 否则, 继续将截取长度加倍, 直至前后两次分析所得主谱频率差别满足误差要求。设最后截取长度为 rM , 则 $X_M(k_0)$ 表示 $\omega = \frac{2\pi}{rM}k_0$ 点的谱线强度。

在很多实际应用中, 并非整个单位圆上的频谱都很有意义。例如, 对于窄带信号, 往往只希望对信号所在的一段频段进行谱分析, 这时便希望取样能密集地在这段频带内进行, 而带外部分可完全不予考虑。另外, 有时希望取样点不局限于单位圆上。例如, 语音信号处理中, 常常需要知道系统极点所对应的频率, 如果极点位置偏离单位圆较远, 则其单位圆上的频谱就很平滑, 如图 4.14(a) 所示, 这时很难从中识别出对应的频率。如果使取样点轨迹接近这些极点的弧线或圆周进行, 则取样结果将会在极点对应的频率上出现明显的尖峰, 如图 4.14(b) 所示, 这样就能准确地测定出极点频率。对均匀分布在以原点为圆心的任何圆上的 N 点 ($z_k = re^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1, \dots, N-1$) 频谱取样, 可用 DFT 计算, 而沿螺旋弧线取样, 则要用线性调频 Z 变换计算。

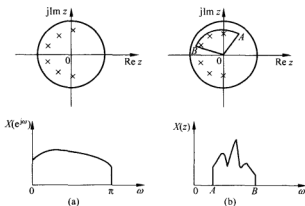


图 4.14 单位圆取样与非单位圆取样

例如, 要求计算序列在半径为 r 的圆上的频谱, 那么 N 个等间隔取样点为 $z_k = re^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1, \dots, N-1$, z_k 点的频谱分量为

$$X(z_k) = X(z) \big|_{z=z_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)r^{-n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

令 $x(n) = x(n)r^{-n}$, 则

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{DFT}[x(n)], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.51)$$

式(4.51)表明, 要计算 $x(n)$ 在半径为 r 的圆上的 N 点等间隔频谱分量, 可以先对 $x(n)$ 乘以 r^{-n} , 再计算 N 点 DFT 即可得到。如果要求 $x(n)$ 分布在该圆的有限角度内 N 点等间隔频谱分量, 可以通过尾部补零的方法, 仍按式(4.51)用 DFT 分析整个圆上的等间隔频谱, 最后只取所需角度内的频谱分量即可。显然, 这种方法的计算量大, 利用第 5 章的 CZT 变换可使这种谱分析的运算量大大减少。

4.6 Matlab 实现

为了理解本章一些比较重要的知识点,如离散傅里叶变换与序列傅里叶变换的关系,利用循环卷积计算线性卷积,频域取样定理,高分辨率与高密度谱之间的差异等,本节安排一些 Matlab 的实例。在 Matlab 中,计算 DFT 可以直接由快速傅里叶变换算法实现,函数为 `fft`,其逆变换函数为 `ifft`。

4.6.1 DFT 物理意义的 Matlab 实现

通过前面的讨论已知,序列的 N 点 DFT 的物理意义是对 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上进行 N 点的等间隔取样。函数 `fft` 用于快速计算向量或矩阵的离散傅里叶变换,调用方式为

```
>>y=fft(x);
>>y=fft(x,N);
```

`y=fft(x)` 利用 FFT 算法计算序列 x 的离散傅里叶变换。当 x 为矩阵时, y 为矩阵 x 每一列的 FFT。当 x 长度为 2 的整数次幂时,函数 `fft` 采用基-2 的 FFT 算法,否则采用混合基算法。

`y=fft(x,N)` 采用 N 点 FFT。当序列 x 长度小于 N 时,函数 `fft` 自动对序列尾部补零,构成 N 点数据;当 x 长度大于 N 时,函数 `fft` 自动截取序列前面 N 点数据进行 FFT。

例 4.3 已知 $x(n)=R_4(n)$, $X(e^{j\omega})=\text{DFT}[x(n)]=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$, 绘制相应的幅频和相频曲线,计算并图示 $N=8$ 和 $N=16$ 时的 DFT。

解 程序如下:

```
>>N1=8; N2=16;
n=0; N1-1;
k1=0; N1-1;
k2=0; N2-1;
w=2*pi*(0:2047)/2048;
Xw=(1-exp(-j*w))./(1-exp(-j*w)); % 指数函数 e^
xn=ones(1,4);
X1k=fft(xn,N1); % 计算 x(n)的 8 点 DFT
X2k=fft(xn,N2); % 计算 x(n)的 16 点 DFT

figure(1)
subplot(3,2,1)
plot(w/pi,abs(Xw)) % 实数的绝对值或复数的幅值
title('x(n)的幅频曲线')

subplot(3,2,2)
plot(w/pi,angle(Xw)) % 求复数 Xw 的相角
axis([0,2,-pi,pi])
line([0,2],[0,0]) % 在坐标为(0,2)和(0,0)两点间画一条直线
title('x(n)的相频曲线')
```

```

subplot(3,2,3)
stem(k1,abs(X1k))
title('x(n)的8点DFT|X1(k)|')
hold on
plot(N1/2 * w/pi,abs(Xw))
subplot(3,2,4)
stem(k1,angle(X1k))
axis([0,N1,-pi,pi])
line([0,N1],[0,0])
title('X1(k)的相位')
hold on
plot(N1/2 * w/pi,angle(Xw))

subplot(3,2,5)
stem(k2,abs(X2k))
title('x(n)的16点DFT|X2(k)|')
hold on
plot(N2/2 * w/pi,abs(Xw))

subplot(3,2,6)
stem(k2,angle(X2k))
axis([0,N2,-pi,pi])
line([0,N2],[0,0])
title('X2(k)的相位')
hold on
plot(N2/2 * w/pi,angle(Xw))

```

* 保持当前图形

程序运行结果如图 4.15 所示,可以直观地看出 $X(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 之间的取样关系。

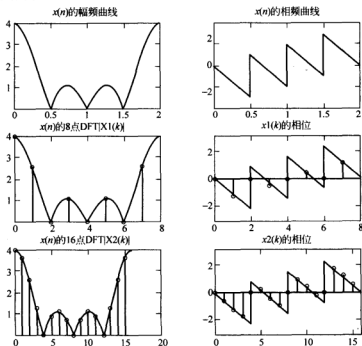


图 4.15 离散傅里叶变换和傅里叶变换的取样关系

4.6.2 用 DFT 计算线性卷积的 Matlab 实现

函数 `ifft` 用于快速计算向量或矩阵的离散傅里叶逆变换,与函数 `fft` 的调用规则基本相同,其调用方式为

```
>>y = ifft(x);
>>y = ifft(x,N);
```

例 4.4 利用 FFT 实现线性卷积。已知序列 $x(n)=R_4(n)$,求:

- (1) 用 `conv` 函数求 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积 $y_1(n)$,并绘出图形;
- (2) 用 FFT 求 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积 $y_2(n)$,并绘出图形;
- (3) 用 FFT 求 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积 $y_3(n)$,并将结果与(1)比较,说明线性卷积与循环卷积之间的关系。

解 程序如下:

```
>>N1=4; N2=8;
n1=0:1:N1-1; n2=0:1:N2-1;
x=[1,1,1,1]; % 构造序列 x(n)
x1=[1,1,1,1,0,0,0,0]; % 在序列 x(n)后补 4 个零
figure(1)
subplot(2,2,1)
stem(n1,x),grid on;
title('序列 x(n)')

y1=conv(x,x); % y1 为 x(n)与 x(n)的线性卷积
subplot(2,2,2)
stem(0:1:length(y1)-1,y1),grid on;
title('x(n)与 x(n)线性卷积')

X2=fft(x); % 计算 x(n)与 x(n)的 4 点循环卷积
Y2=X2.*X2;
y2=ifft(Y2);
subplot(2,2,3)
stem(n1,y2),grid on;
title('x(n)与 x(n)的 4 点循环卷积')

X3=fft(x1); % 计算 x(n)与 x(n)的 8 点循环卷积
Y3=X3.*X3;
y3=ifft(Y3)
subplot(2,2,4)
stem(n2,y3),grid on;
title('x(n)与 x(n)的 8 点循环卷积')
```

$x(n)$ 与 $x(n)$ 的循环卷积可被看作是它们的线性卷积的周期延拓的主值。两个长度为 N 的序列的线性卷积长度为 $2N-1$,序列的延拓周期为 L 。如果 $L < 2N-1$,则周期延拓必有一部分非零值序列相重叠,从而出现混叠失真。

在例 4.4 中,由于线性卷积的长度为 $4+4-1=7$,当循环卷积长度为 4 时,明显出现混

叠失真。相反,如果 $L \geq 2N-1$, 则周期延拓不会产生混叠失真,即两个长度为 N 的序列的线性卷积可用长度为 L 的循环卷积来代替。程序运行结果如图 4.16 所示,可以看出,当计算 8 点循环卷积时,循环卷积的结果和线性卷积的结果相等,没有混叠失真。

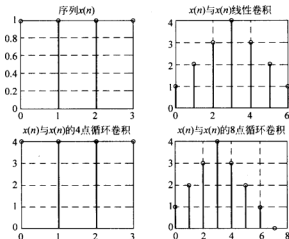


图 4.16 线性卷积与循环卷积的计算

4.6.3 频域取样定理的 Matlab 实现

例 4.5 设 $x(n) = (0.7)^n \cdot u(n)$, 在单位圆上以 $M=5$ 和 $M=20$, 对其 Z 变换取样, 研究时域信号受 M 变化的影响。

- (1) 对 $x(n)$ 进行 Z 变换;
- (2) 对 $X(z)$ 进行等角取样, 取样点数为 M , 求为 $X(k)$;
- (3) 对 $X(k)$ 进行 IDFT 变化, 得到 M 点序列, 请比较几个序列, 并进行分析。

解 首先计算 $x(n) = (0.7)^n \cdot u(n)$ 的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{z}{z - 0.7}$$

程序如下:

```
>>n=0:19;
x=(0.7).^n;
na=0:4;
za=exp(j*2*pi*na/5); % 在 z 平面的单位圆上对其进行 5 点的等角距取样
Xa=za./(za-0.7);
xa=abs(ifft(Xa));
nb=0:19;
zb=exp(j*2*pi*nb/20); % 在 z 平面的单位圆上对其进行 20 点的等角距取样
Xb=zb./(zb-0.7);
xb=abs(ifft(Xb));
```

```

figure(1)
subplot(2,2,1); % 画出原始时域信号
stem(n,x)
title('时域信号 x(n)')
subplot(2,2,2);
xa = [xa, xa, xa, xa];
stem(n,xa)
title('5 点取样恢复的序列')
subplot(2,2,3);
stem(n,xb)
title('20 点取样恢复的序列')

```

根据频域取样定理,由于序列 $x(n) = (0.7)^n \cdot u(n)$ 是无限长的,所以不论取样点为多少,由频域取样值恢复出的序列和原序列相比都会出现失真。但是,序列 $x(n)$ 是一个减函数,当 n 值比较大时,序列值就基本接近于 0,所以通过本实验可以观察到取样点值越大,混叠就应该越小。程序运行结果如图 4.17 所示,可以看出, $N=20$ 取样并还原后产生的混叠较小;当 $N=5$ 时,可以看到发生了明显的混叠失真。

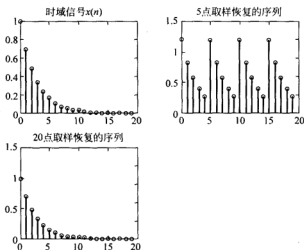


图 4.17 频域取样定理

4.6.4 高密度谱与高分辨率谱差异的 Matlab 实现

例 4.6 试通过计算说明高密度频谱和高分辨率频谱之间的差异。设

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

- (1) 取 $x(n)$ ($0 \leq n \leq 9$) 时,求其离散傅里叶变换 $X_1(k)$;
- (2) 将(1)中的 $x(n)$ 以补零的方式,使 $x(n)$ 加长到 $0 \leq n \leq 99$,求 $X_2(k)$;
- (3) 取 $x(n)$ ($0 \leq n \leq 99$),求 $X_3(k)$;
- (4) 比较分析 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 、 $X_3(k)$,说明高密度频谱和高分辨率频谱之间的差异。

解 程序如下:

```
>>n1=0:9;
x=cos(0.48*pi*n1)+sin(0.52*pi*n1);
X1=abs(fft(x)); % 对10点的时域信号进行FFT变换并取模
xc=[x,zeros(1,90)]; % 在序列后补90个零,得到长度为100的序列
X2=abs(fft(xc)); % 对补零后的时域信号进行FFT变换并取模
n=0:99;
xn=cos(0.48*pi*n)+sin(0.52*pi*n); % 建立100个点的时域信号
X3=abs(fft(xn)); % 对100点的时域信号进行FFT变换并取模

figure(1);
subplot(3,1,1);
stem(n1,X1) % 画出原始信号10点的DFT变换的图
title('取样10点的DFT')
subplot(3,1,2);
stem(n,X2) % 画出补90个零后的DFT变换的图
title('补0到100点的DFT')
subplot(3,1,3);
stem(n,X3) % 画出取样点数为100的DFT变换的图
title('取样100点的DFT')
```

程序运行结果如图 4.18 所示。

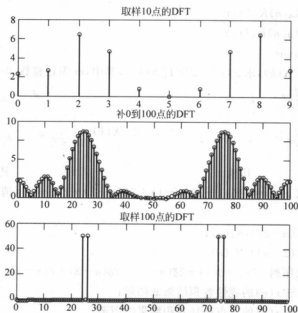


图 4.18 高密度频谱和高分辨率频谱之间的差异

分析给出的序列 $x(n)$ 可知, $x(n)$ 真实频谱只有两个频率成分, 分别是 0.48π 和 0.52π 。当取样点只有 10 个时, 从图中几乎无法看出信号频谱的真实信息, 只是数字域频谱的一个

周期中有 10 根谱线。当在 10 个取样点后补 90 个零后,可以看出,这时的谱线相当密,因此是高密度谱,但是其频谱形状和只有 10 个点的频谱形状基本相同,还是很难看出信号的真实频谱成分。仔细计算可以得知,所给出的 $x(n)$ 是以 50 为周期的序列,因此,当取样点为 100 时,从图中可以很清晰地看出信号的频谱成分,称为高分辨率频谱。

习 题

4.1 设 $x(n) = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 。

4.2 设 $x(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $h(n) = R_4(n-2)$, 令 $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, $\tilde{h}(n) = h((n))_6$, 试求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{h}(n)$ 的周期卷积, 并作图。

4.3 计算以下序列的 N 点 DFT。

(1) $x(n) = \delta(n)$;

(2) $x(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$;

(3) $x(n) = a^n R_N(n)$;

(4) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nm} R_N(n)$, $0 < m < N$;

(5) $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}nm\right) R_N(n)$, $0 < m < N$;

(6) $x(n) = \sin(\omega_0 n) R_N(n)$;

(7) $x(n) = \cos(\omega_0 n) R_N(n)$;

(8) $x(n) = n R_N(n)$ 。

4.4 已知序列 $X(k)$, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 其中, m 为正整数, $0 < m < N/2$ 。

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta} & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta} & k = N - m \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2) X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} e^{j\theta} & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta} & k = N - m \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

4.5 已知序列 $x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$, 请画出序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的图形。

(1) $x_1(n) = x((n-2))_4 R_4(n)$;

(2) $x_2(n) = x((2-n))_4 R_4(n)$ 。

4.6 已知 4 点序列 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$ 。

(1) 画出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积结果的图形;

(2) 画出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积结果的图形;

(3) 画出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积的结果的图形, 并将结果与 (1) 比较, 说明线性卷积与循环卷积之间的关系。

4.7 已知 $x(n)$ 是 N 点的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将它变成 rN 点的有限长序列 $y(n)$,

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

试求 rN 点 DFT $[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

4.8 已知 $x(n)$ 是 N 点的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零值, 得到 rN 点的有限长序列 $y(n)$,

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r) & n = ir, i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求 rN 点 DFT $[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

4.9 长度 $N=10$ 的两个有限长序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases} \quad x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ -1 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

作图表示 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和两序列的循环卷积。

4.10 证明 DFT 的对称定理, 若假设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则 $\text{DFT}[x(n)] = NX(N-k)$ 。

4.11 如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 证明 DFT 的初值定理

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

4.12 设 $x(n)$ 的长度为 N , 且

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令

$$h(n) = x((n))_N \cdot R_N(n)$$

$$H(k) = \text{DFT}[h(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

求 $X(k)$ 与 $H(k)$ 的关系。

4.13 证明: 若 $x(n)$ 实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也实偶对称; 若 $x(n)$ 实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚函数且奇对称。

4.14 若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$, 证明:

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = W_N^{nl} x(n)$$

4.15 证明离散相关定理: 若 $X(k) = X_1^*(k) \cdot X_2(k)$, 则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) \cdot x_2((l+n))_N R_N(n)$$

4.16 证明离散帕斯瓦尔定理: 若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

4.17 已知 $f(n) = x(n) + jy(n)$, $x(n)$ 与 $y(n)$ 均为 N 长实序列。设 $F(k) = \text{DFT}[f(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$,

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}; \quad (2) F(k) = 1 + jN,$$

其中 a, b 为实数。试求 $x(n)$ 和 $y(n)$ 及离散傅里叶变换 $X(k)$ 、 $Y(k)$ 。

4.18 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 对 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上等间隔取

样 N 点, 取样值为

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 IDFT $[X(k)]$ 。

4.19 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n) = 0, \quad n < 0, \quad 8 \leq n$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0, \quad 20 \leq n$$

对每个序列作 20 点 DFT, 即

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

如果

$$F(k) = X(k) \cdot Y(k), \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$f(n) = \text{IDFT}[F(k)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

试问在哪些点上 $f(n) = x(n) * y(n)$, 为什么?

4.20 用微处理机对实数序列作谱分析, 要求谱分辨率 $\leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1kHz , 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 T_{pmin} ;

(2) 最大取样间隔 T_{max} ;

(3) 最少取样点数 N_{min} ;

(4) 在频带宽度不变的情况下, 要求谱分辨率提高一倍的最小记录时间, 最少取样点数是多少?

4.21 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1\text{kHz}$, 调制信号频率 $f_m = 100\text{Hz}$, 用 FFT 对其进行谱分析, 试问:

(1) 最小记录时间 T_{pmin} 为多少?

(2) 最低取样频率 f_s 为多少?

(3) 最少取样点数 N_{min} 为多少?

快速傅里叶变换

5.1 引言

离散傅里叶变换(DFT)在实际应用中很重要,利用它可以计算信号的频谱、功率谱和线性卷积等。但是,若直接按 DFT 变换进行计算,当序列长度 N 很大时,计算量非常大,所需要的时间会很长。因此,如何减少 DFT 的运算量以提高计算 DFT 的速度,便成为重要的研究课题。1965 年库利(Cooley)和图基(Tukey)在《计算数学》杂志上发表了关于快速计算 DFT 的算法,之后又出现了各种各样的快速计算 DFT 的算法,这些方法统称为快速傅里叶变换(fast Fourier transform,FFT)。但是需要强调的是,FFT 并不是一种与 DFT 不同的变换,而是 DFT 的一种快速计算算法。

本章介绍快速傅里叶变换的具体实现方法,主要包括直接计算 DFT 的问题及改进的途径、按时间抽取(DIT)的 FFT 算法(库利-图基算法)、频率抽取(DIF)的 FFT 算法(桑德-图基算法)、离散傅里叶逆变换(IDFT)的快速计算方法、混合基算法、线性调频 Z 变换(chirp-Z)算法。

5.2 直接计算 DFT 的问题及改进的途径

5.2.1 DFT 的运算量

设 $x(n)$ 为 N 点有限长序列,其 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

逆变换 IDFT 为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

二者的差别只在于 W_N 指数符号不同,以及差一个常数因子 $1/N$ 。因而,下面只讨论 DFT 正变换式(5.1)的运算量,式(5.2)的运算量也基本相同。

一般来说, $x(n)$ 和 W_N^{nk} 都是复数, $X(k)$ 也是复数,因此每计算一个 $X(k)$ 值,需要 N 次

复数乘法($x(n)$ 与 W_N^{nk} 相乘)以及 $N-1$ 次复数加法。而 $X(k)$ 一共有 N 个点(k 从0取到 $N-1$)，所以完成整个DFT运算总共需要 N^2 次复数乘法及 $N(N-1)$ 次复数加法。而复数运算实际上是由实数运算来完成的，因此式(5.1)可写成

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} [\operatorname{Re}x(n) + j\operatorname{Im}x(n)] [\operatorname{Re}W_N^{nk} + j\operatorname{Im}W_N^{nk}] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \{ [\operatorname{Re}x(n) \cdot \operatorname{Re}W_N^{nk} - \operatorname{Im}x(n) \cdot \operatorname{Im}W_N^{nk}] + \\ &\quad j[\operatorname{Re}x(n) \cdot \operatorname{Im}W_N^{nk} + \operatorname{Im}x(n) \cdot \operatorname{Re}W_N^{nk}] \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

由式(5.3)可见，一次复数乘法需要四次实数乘法和二次实数加法(实部和虚部分别相加)来实现。这样，每运算一个 $X(k)$ 需要 $4N$ 次复数乘法及 $2N+2(N-1)=2(2N-1)$ 次实数加法。所以整个DFT运算共需要 $4N^2$ 次实数乘法和 $N \times 2(2N-1)=2N(2N-1)$ 次实数加法。

上述统计与实际需要的运算次数有些出入，因为某些 W_N^{nk} 可能是1或 j ，就不必相乘了，例如 $W_N^0=1$ 、 $W_N^{N/2}=-1$ 、 $W_N^{N/4}=j$ 等就不需要乘法。但是为了比较，一般都不考虑这些特殊情况，而是把 W_N^{nk} 都看成复数，当 N 很大时，这种特例的比重就很小。

因而，直接计算DFT时，乘法次数和加法次数都与 N^2 成正比，当 N 很大时，其运算量是很可观的。例如，当 $N=8$ 时，DFT需64次复乘；当 $N=1024$ 时，DFT所需复乘为1048567次，即100多万次复数乘法运算。而对实时性很强的信号处理来说，要求计算速度快，因而必须改进DFT的计算方法，以大大减少运算次数。

5.2.2 减少运算工作量的途径

仔细观察DFT的运算就可看出，利用系数 W_N^{nk} 的以下固有特性，就可减少DFT的运算量。

1) W_N^{nk} 的对称性

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{k(N-n)}$$

2) W_N^{nk} 的周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

由此可得出

$$W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk}, \quad W_N^{N/2} = -1, \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

利用这些特性，DFT运算中有些项可以合并，利用 W_N^{nk} 的对称性和周期性，可以将长序列的DFT分解为短序列的DFT。前面已经提到，DFT的运算量是与 N^2 成比例的，所以 N 越小越有利，因而短序列的DFT比长序列的DFT的运算量要小。

快速傅里叶变换(FFT)算法正是基于这样的基本思路而发展起来的。它的算法基本上可以分成两大类，即按时间抽取(decimation-in-time, DIT)法和按频率抽取(decimation-in-frequency, DIF)法。

5.3 按时间抽取的基-2FFT 算法(库利-图基算法)

5.3.1 算法原理

首先设序列长度为 $N=2^L$, 其中 L 为整数。如果不满足这个条件, 可以人为地给序列加上若干零值点达到这一要求。这种 N 为 2 的整数幂的 FFT, 也称为基-2FFT。

将 $N=2^L$ 的序列 $x(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$), 先按 n 的奇偶分成两组, 即

$$\left. \begin{aligned} x(2r) &= x_1(r) \\ x(2r+1) &= x_2(r) \end{aligned} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.4)$$

根据 DFT 的定义

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为偶数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为奇数}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_N^{2rk} \end{aligned}$$

由于 $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$, 故上式又可表示为

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad (5.5)$$

式中, $X_1(k)$ 及 $X_2(k)$ 分别是 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT

$$X_1(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} \quad (5.6)$$

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk} \quad (5.7)$$

由式(5.5)看出, 一个 N 点 DFT 已分解为两个 $N/2$ 点的 DFT, 它们按式(5.5)又组合成一个新的 DFT。但是, $x_1(r)$ 、 $x_2(r)$ 以及 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 都是 $N/2$ 点的序列, 即满足 $r, k=0, 1, \dots, N/2-1$ 。而 $X(k)$ 却有 N 点, 用式(5.5)计算得到的只是 $X(k)$ 的前一半项数的结果, 要用 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 来表达全部 $X(k)$ 值, 还必须应用系数的周期性, 即

$$W_{N/2}^{rk} = W_{N/2}^{r(N/2+k)}$$

这样可得到

$$X_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{r(N/2+k)} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = X_1(k) \quad (5.8)$$

同理可得

$$X_2\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_2(k) \quad (5.9)$$

式(5.8)和式(5.9)说明了后半部分 k 值($N/2 \leq k \leq N-1$)所对应的 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 分别等于前半部分 k 值($0 \leq k \leq N/2$)所对应的 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 。

再考虑 W_N^k 的对称性

$$W_N^{(N/2+k)} = W_N^{N/2} \cdot W_N^k = -W_N^k \quad (5.10)$$

把式(5.8)~式(5.10)代入到式(5.5)中,就可将 $X(k)$ 表达为下面所列的前后两部分:

前半部分 $X(k)$ 为

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.11)$$

后半部分 $X(k)$ 为

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+N/2} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) \\ &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

这样,只要求出 $0 \sim \frac{N}{2} - 1$ 区间的所有 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 值,即可求出 $0 \sim N-1$ 区间内的所有 $X(k)$ 值,从而大规模地减少了运算量。

式(5.11)和式(5.12)的运算可以用如图 5.1 所示的蝶形信号流图符号表示。当支路上没有标出系数时,则该支路的传输系数为 1。

采用这种表示法,可将上面讨论的分解过程示于图 5.2 中,图 5.2 表示 $N=2^3=8$ 的情况,其中输出值 $X(0) \sim X(3)$ 是由式(5.11)给出的,而输出值 $X(4) \sim X(7)$ 是由式(5.12)给出的。

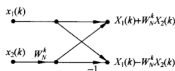


图 5.1 时间抽取法蝶形信号流图符号

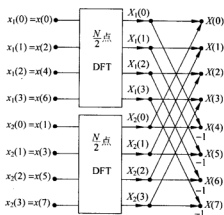


图 5.2 按时间抽取,将一个 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT

可以看出,每个蝶形运算需要一次复数乘法($X_2(k) \cdot W_N^k$)及两次复数加(减)法[$X_1(k) + W_N^k X_2(k)$, $X_1(k) - W_N^k X_2(k)$]。因此,一个 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT 后,如果直接计算 $N/2$ 点 DFT,则每一个 $N/2$ 点 DFT 只需要 $\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{4}$ 次复数乘法、 $\frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ 次复数

加法。两个 $N/2$ 点 DFT 共需 $2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2$ 次复数乘法法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复数加法。此外,把两个 $N/2$ 点 DFT 合成为 N 点 DFT 时,有 $N/2$ 个蝶形运算,还需要 $N/2$ 次复数乘法及 $2 \times \frac{N}{2} = N$ 次复数加法。因而通过第一步分解后,总共需要 $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right) + N = \frac{N^2}{2}$ 次复数加法。因此通过一次分解后,运算工作量减少了差不多一半。

既然如此,由于 $N=2^L$,因而 $N/2$ 仍是偶数,可以进一步把每个 $N/2$ 点子序列再按其奇偶部分分解为两个 $N/4$ 点的子序列。以 $N/2$ 点序列 $x_1(r)$ 为例

$$\left. \begin{aligned} x_1(2l) &= x_3(l) \\ x_1(2l+1) &= x_4(l) \end{aligned} \right\}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (5.13)$$

则有

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \\ &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned}$$

且

$$X_1\left(\frac{N}{4} + k\right) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

式中

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} \quad (5.14)$$

$$X_4(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \quad (5.15)$$

图 5.3 表示出了 $N=8$ 时,将一个 $N/2$ 点 DFT 分解成两个 $N/4$ 点 DFT,并由此两个 $N/4$ 点 DFT 组合成一个 $N/2$ 点 DFT 的信号流程图。

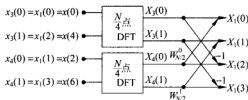


图 5.3 由两个 $N/4$ 点 DFT 组合成一个 $N/2$ 点 DFT

$X_2(k)$ 也可进行同样的分解

$$X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$X_2\left(\frac{N}{4} + k\right) = X_5(k) - W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

式中

$$X_5(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{lk} \quad (5.16)$$

$$X_4(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l+1) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{lk} \quad (5.17)$$

将系数统一为 $W_{N/2}^k = W_N^{2k}$, 则一个 $N=8$ 点 DFT 就可分解为四个 $N/4=2$ 点的 DFT, 这样可得如图 5.4 所示的信号流程图。

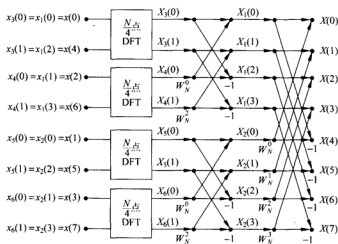


图 5.4 按时间抽取, 将一个 N 点 DFT 分解为四个 $N/4$ 点 DFT ($N=8$)

根据上面同样的分析可知, 利用四个 $N/4$ 点的 DFT 及两级蝶形组合运算来计算 N 点 DFT, 比只用一次分解蝶形组合方式的计算量又减少了大约一半。

对此例 $N=8$, 最后剩下的是四个 $N/4=2$ 点的 DFT, 其输出为 $X_3(k)$ 、 $X_1(k)$ 、 $X_5(k)$ 、 $X_6(k)$, $k=0, 1$, 由式 (5.14)~式 (5.17) 四个式子可以计算出来, 例如由式 (5.15) 可得

$$X_4(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^1 x_4(l) W_{N/4}^{lk}, \quad k = 0, 1$$

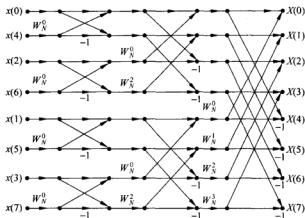
即

$$X_4(0) = x_4(0) + W_2^0 x_4(1) = x(2) + W_2^0 x(6) = x(2) + W_{N/4}^0 x(6)$$

$$X_4(1) = x_4(0) + W_2^1 x_4(1) = x(2) + W_2^1 x(6) = x(2) - W_{N/4}^0 x(6)$$

上式中 $W_2^1 = e^{-j\frac{1}{2}\pi} = -e^{-j\pi} = -1 = -W_N^4$, 故计算上式不需要乘法。类似地可求出 $X_3(k)$ 、 $X_5(k)$ 、 $X_6(k)$, 这些 2 点 DFT 都可用一个蝶形运算表示。由此可得出一个按时间抽取运算的完整 8 点 DFT 信号流程图, 如图 5.5 所示。

这种方法的每一步分解都按输入序列在时间上的次序是属于偶数还是属于奇数来分解为两个更短的子序列, 所以称为“按时间抽取法”。

图 5.5 $N=8$ 按时间抽取法 FFT 信号流图

5.3.2 按时间抽取基-2FFT 算法与直接计算 DFT 运算量的比较

由按时间抽取法 FFT 的信号流图可知, 当 $N=2^L$ 时, 共有 L 级蝶形, 每级都由 $N/2$ 个蝶形运算组成, 而每个蝶形有一次复乘、二次复加, 因此每级运算都需 $N/2$ 次复乘和 N 次复加, 这样 L 级运算总共需要:

复数乘法

$$\frac{N}{2} \cdot L = \frac{N}{2} \log_2 N (\text{次}) \quad (5.18)$$

复数加法

$$N \cdot L = N \log_2 N (\text{次}) \quad (5.19)$$

实际计算量和这个数字稍有不同, 因为 $W_N^0=1$ 、 $W_N^{N/2}=-1$ 、 $W_N^{\pm N/4}=\pm j$, 与这几个系数相乘实际上不需要乘法运算, 但是这些情况在直接计算 DFT 中也是存在的, 且当 N 较大时, 这些特例相对而言就很少。所以为了统一比较起见, 下面都不考虑这些特例。

由于在计算机上作乘法运算所需时间比作加法运算所需时间多得多, 故以乘法为例, 在表 5.1 中列出了 FFT 算法与直接 DFT 算法运算量的比较, 直接 DFT 复数乘法次数是 N^2 , FFT 复数乘法次数是 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 。

表 5.1 FFT 算法与直接 DFT 算法的比较

N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	M	N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	M
2	4	1	4.0	128	16 384	448	36.6
4	16	4	4.0	256	65 536	1024	64.0
8	64	12	5.4	512	262 144	2304	113.8
16	256	32	8.0	1024	1 048 576	5120	204.8
32	1028	80	12.8	2048	4 194 304	11 264	372.4
64	4049	192	21.4				

设直接计算 DFT 与 FFT 算法的计算量之比为 M , 则

$$M = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N} \quad (5.20)$$

5.3.3 按时间抽取的 FFT 算法的特点

为了得到任何 $N=2^L$ 点的时间抽取基-2FFT 算法流程图或设计出硬件实现电路, 下面分析按时间抽取法分解过程的规律和特点。

1. 原位运算

从图 5.5 可以看出, 这种运算是很有规律的, 其每级(每列)计算都是由 $N/2$ 个蝶形运算构成, 每一个蝶形结构完成下述基本迭代运算

$$\begin{aligned} X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(j)W_N^k \\ X_m(j) &= X_{m-1}(k) - X_{m-1}(j)W_N^k \end{aligned} \quad (5.21)$$

式(5.21)中, m 表示第 m 列迭代; k, j 为数据所在行数。式(5.21)的蝶形运算结构由一次复乘和两次复加(减)组成, 如图 5.6 所示。

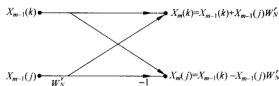


图 5.6 时间抽取法蝶形运算结构

由图 5.5 的流程图看出, 某一系列任何两个节点 k 和 j 的节点变量进行蝶形运算后, 得到结果为下一列 k, j 两节点的节点变量, 而和其他节点变量无关, 因而可以采用原位运算, 即某一系列的 N 个数据送到存储器后, 经蝶形运算, 其结果为另一列数据, 它们以蝶形为单位仍存储在同一组存储器中。每列的 $N/2$ 个蝶形运算全部完成后, 再开始下一列的蝶形运算。这样存储数据只需 N 个存储单元。下一级的运算仍采用这种原位方式, 只不过进入蝶形运算的组合关系有所不同。这种原位运算结构可以节省存储单元, 降低设备成本。

2. 倒位序规律

由图 5.5 可以看出, 按原位计算时, FFT 的输出 $X(k)$ 按正常顺序排列在存储单元中, 即按 $X(0), X(1), \dots, X(7)$ 的顺序排列, 但是输入 $x(n)$ 却不是按自然顺序存储的, 而是按 $x(0), x(4), \dots, x(7)$ 的顺序存入存储单元, 看起来好像是“混乱无序”的, 实际上却是有规律的, 称之为倒位序。

造成倒位序的原因是输入 $x(n)$ 按标号 n 的奇偶不断分组而造成的。如果 n 用二进制数表示为 $(n_2 n_1 n_0)_2$ (当 $N=8$ 时, 二进制为三位), 第一次分组, 由图 5.2 看出, n 为偶数在上

半部分, n 为奇数在下半部分, 这样可以观察 n 的二进制数的最低位 n_0 , $n_0=0$ 序列值对应于偶数抽样, $n_0=1$ 序列值对应于奇数抽样。下一次则根据次最低位 n_1 的 0、1 来分偶奇(而不管原来的子序列是偶序列还是奇序列)。这种不断分成偶数子序列和奇数子序列的过程可用图 5.7 所示的二进制树状图来描述。这就是 DIT 的 FFT 算法输入序列的序数成为倒位序的原因。

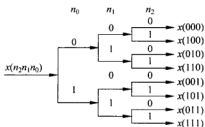


图 5.7 描述倒位序的树状图

3. 倒位序的实现

一般实际运算中,总是先按自然顺序将输入序列存入存储单元,为了得到倒位序的排列,可以通过变址运算来完成。如果输入序列的序号 n 用二进制数如 $n_2n_1n_0$ 表示,则其倒位序二进制数 \hat{n} 就是 $n_0n_1n_2$, 在原来自然顺序时应该存放 $x(n)$ 的单元,倒位序后应存放 $x(\hat{n})$ 。例如 $N=8$ 时, $x(3)$ 的标号是 $n=3$, 它的二进制数是 011, 倒位序的二进制数是 110, 即 $\hat{n}=6$, 所以存 $x(011)$ 的单元现在应该存放 $x(110)$ 。表 5.2 列出了 $N=8$ 时的自然顺序二进制数, 以及相应的倒位序二进制数。

表 5.2 码位的倒位序 ($N=8$)

自然顺序 n	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序 \hat{n}	自然顺序 n	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序 \hat{n}
0	000	000	0	4	100	001	1
1	001	100	4	5	101	101	5
2	010	010	2	6	110	011	3
3	011	110	6	7	111	111	7

把按自然顺序存放在存储单元中的数据,换成 FFT 原位运算所要求的倒位序数据。变址功能如图 5.8 所示。当 $n=\hat{n}$ 时,不必调换; 当 $n \neq \hat{n}$ 时,必须将原来存放数据 $x(n)$ 的存储单元内调入数据 $x(\hat{n})$, 而将存放 $x(\hat{n})$ 的存储单元内调入 $x(n)$ 。为了保证只调换一次(否则又回到原来的状态),避免把已调换过的数据再次调换,只需看 \hat{n} 是否比 n 小,若 \hat{n} 比 n 小,则意味着此 $x(n)$ 在前面已与 $x(\hat{n})$ 互相调换过,不必再调换; 只有当 $\hat{n} > n$ 时,才将原存放的 $x(n)$ 及存放 $x(\hat{n})$ 的存储单元内的内容互换,从而就得到输入所需的倒位序的顺序。可以看出,其结果与图 5.5 所示的要求是一致的。

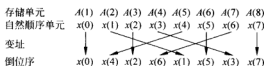


图 5.8 倒位序的变址处理

4. 蝶形运算中两节点的“距离”

以图 5.5 的 8 节点 FFT 为例,其输入是倒位序的、输出是自然顺序的。第一列每个蝶形中的两个节点之间的“距离”为 1,第二级每个蝶形的两个节点间“距离”为 2,第三级的两个节点间“距离”为 4。由此类推得,对 $N=2^L$ 点 FFT,当输入为倒位序、输出为正常顺序时,其第 m 级运算每个蝶形的两个节点间“距离”为 2^{m-1} 。

5. 旋转因子 W_N^r 的确定

对第 m 级蝶形运算时,其中一个蝶形运算的两节点间“距离”为 2^{m-1} ,因而式(5.21)可以写成

$$\begin{aligned} X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^r \\ X_m(k + 2^{m-1}) &= X_{m-1}(k) - X_{m-1}(k + 2^{m-1})W_N^r \end{aligned} \quad (5.22)$$

每个蝶形都要乘以因子 W_N^r ,称其为旋转因子, r 称为旋转因子的指数。但各级的旋转因子不同。为了编写计算程序,应先找出旋转因子 W_N^r 与运算级数的关系。用 L 表示从左到右的运算级数($L=1,2,\dots,M$)。观察图 5.5 不难发现,第 L 级共有 2^{L-1} 个不同的旋转因子。 $N=2^3=8$ 时的各级旋转因子表示如下:

$$L=1 \text{ 时, } W_N^r = W_{N/4}^r = W_2^r = W_{2^L}^r, J=0$$

$$L=2 \text{ 时, } W_N^r = W_{N/2}^r = W_4^r = W_{2^L}^r, J=0,1$$

$$L=3 \text{ 时, } W_N^r = W_N^r = W_8^r = W_{2^L}^r, J=0,1,2,3$$

对 $N=2^M$ 的一般情况,第 L 级的旋转因子为

$$W_N^r = W_{2^L}^r, \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1$$

由于 $2^L = 2^M \times 2^{L-M} = N \cdot 2^{L-M}$, 所以第 L 级蝶形运算的旋转因子为

$$W_N^r = W_{N \cdot 2^{L-M}}^r = W_N^{J \cdot 2^{M-L}}, \quad r = J \cdot 2^{M-L}, \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1 \quad (5.23)$$

5.3.4 按时间抽取的 FFT 算法的其他形式流图

显然,对于任何流图,只要保持各节点所连的支路及其传输系数不变,则不论节点位置怎么排列,所得流图总是等效的,最后所得的结果都是 $x(n)$ 的 DFT 正确结果,只是数据的提取和存放的次序不同而已。这样就可得到按时间抽取的 FFT 算法的若干其他形式流图。

将图 5.5 中和 $x(4)$ 水平相连的所有节点与和 $x(1)$ 水平相连的节点位置对调,再将和 $x(6)$ 水平相连的所有节点与和 $x(3)$ 水平相连的所有节点对调,其余诸节点保持不变,则可得到如图 5.9 所示的流图。图 5.9 与图 5.5 的蝶形相同,运算量也一样,不同点是:

① 数据存放的方式不同,图 5.5 输入倒位序,输出是自然顺序;图 5.9 输入自然顺序,输出倒位序。

② 取用系数的顺序不同,图 5.5 的最后一列是按 $W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3$ 的顺序取用系数;图 5.9 的最后一列是按 $W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3$ 的顺序取用系数,且其前一列所用的系数正好是

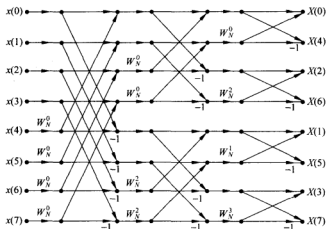


图 5.9 时间抽取,输入自然顺序、输出倒位序的 FFT 流图

最后一列所用系数的前一半,这种信号流图是最初由库利和图基给出的时间抽取法。

经过简单的变换,可得到如图 5.10 所示的流图。它的输入与输出都是按自然顺序排列的,不需要倒位序重排数据。但是它却不能进行原位运算,因而 N 个输入数据,至少需要 $2N$ 个复数存储单元。通常可以在专用硬件实现中利用这种流程。

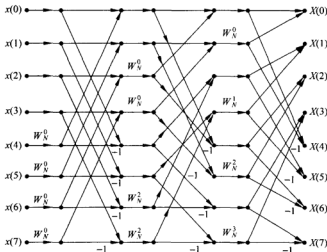


图 5.10 时间抽取,输入、输出皆为自然顺序的 FFT 流图

以图 5.9 和图 5.10 各流图进行各列计算时,各存储器的取数和存数的顺序都是不同的,因此必须采用随机存储器。

当没有随机存储器时,采用图 5.11 的信号流图特别有用,此流图输入是倒位序的,而输出则是自然顺序的,流图各级的几何形状完全一样,只是级与级之间的支路传输比改变了,这就有可能按顺序存取数据。

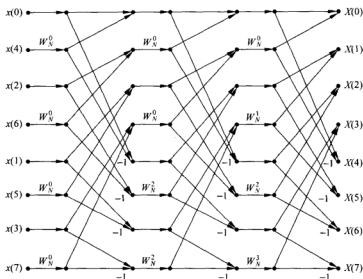


图 5.11 时间抽取、各级具有相同几何形状,输入倒位序、输出自然顺序的 FFT 流图

图 5.12 的信号流图也是各级几何形状相同的信号流图,不过它的输入是自然顺序排列,而输出却是倒位序排列的。

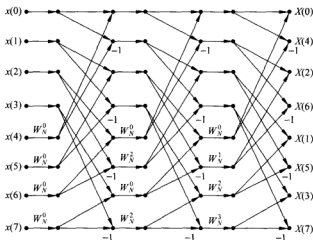


图 5.12 时间抽取、各级具有相同几何形状,输入自然顺序、输出倒位序的 FFT 流图

5.4 按频率抽取的基-2FFT 算法(桑德-图基算法)

本节将讨论按频率抽取的 FFT 算法,是一种与按时间抽取的 FFT 相对应的算法,它将频域的输出序列 $X(k)$ (也是 N 点序列)按其序号 k 的奇偶性,分解为越来越短的序列。

$$\begin{aligned}
 X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\
 X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr}
 \end{aligned} \quad , \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.28)$$

式(5.27)所表示的运算关系可以用图 5.13 所示的蝶形运算来表示。

这样就把一个 N 点 DFT 按频率 k 的奇偶分解为两个 $N/2$ 点的 DFT, 如式(5.28)所示。当 $N=8$ 时, 上述分解过程如图 5.14 所示。

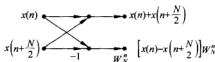


图 5.13 频率抽取法蝶形运算流图符号

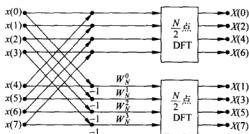


图 5.14 按频率抽取, 将 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT 的组合 ($N=8$)

与时间抽取法的推导过程一样, 由于 $N=2^L$, $N/2$ 仍然是一个偶数, 因而可以将每个 $N/2$ 点 DFT 的输出再分解为偶数组与奇数组, 这就将 $N/2$ 点 DFT 进一步分解为两个 $N/4$ 点 DFT。这两个 $N/4$ 点 DFT 的输入是将 $N/2$ 点 DFT 的输入上下对半分开后通过蝶形运算而形成的, 图 5.15 表达了这一步分解的过程。

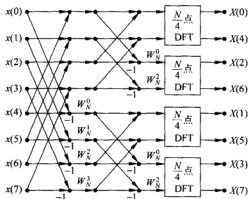


图 5.15 按频率抽取一个 N 点 DFT 分解 4 个 $N/4$ 点 ($N=8$)

此分解可以一直进行到第 L 次 ($N=2^L$)。第 L 次实际上是做两点 DFT, 它只有加减运算, 但是为了比较并统一运算结构, 仍然采用系数为 W_N 的蝶形运算来表示, 这 $N/2$ 个两点 DFT 的 N 个输出就是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 的结果 $X(k)$ 。图 5.16(a) 表示了一个 $N=8$ 的完整的按频率抽取的 FFT 结构。

由图 5.16(a) 的信号流图看出, 频率抽取法 FFT 的这一流图仍是原位运算的, 其编程

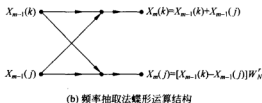
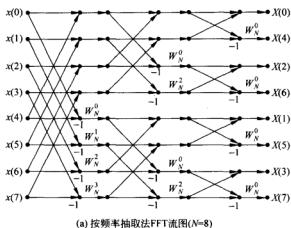


图 5.16 按频率抽取法 FFT 信号流图

规律可根据按时间抽取 FFT 一样进行总结,这里不再赘述。

5.4.2 频率抽取法与时间抽取法的异同

由图 5.16(a)与图 5.5 相比较可以看出,DIF 法与 DIT 法的区别是:图 5.16(a)的 DIF 输入是自然顺序,输出是倒位序的,这与图 5.5 的 DIT 法正好相反。但这不是实质性的区别,因为 DIF 法与 DIT 法一样,都可将输入或输出进行重排,使二者的输入、输出顺序变成自然顺序。因为图 5.16(a)DIF 法的输出是倒位序的,故要经过重排变为自然顺序输出,其重排的规律与 DIF 的基本蝶形(图 5.16(b))及 DIT 的基本蝶形(图 5.6)则有所不同,DIF 的复数乘法出现在减法之后,DIT 则是先作复乘后再作加减法。

但是,DIF 与 DIT 的运算量是相同的,即都有 L 级(列)运算,每级运算需 $N/2$ 个蝶形运算来完成,总共需要 $m_F = (N/2) \log_2 N$ 次复乘与 $a_F = N \log_2 N$ 次复加,并且 DIF 法与 DIT 法都可进行原位运算。

DIT 与 DIF 基本蝶形的关系可由图 5.6 与图 5.16(b)的基本蝶形运算结构看出,如果将 DIT 的基本蝶形加以转置,就得到 DIF 的基本蝶形;反过来,将 DIF 的基本蝶形加以转置,就得到 DIT 的基本蝶形,因而 DIT 法与 DIF 法的基本蝶形是互为转置的。按照转置定理,两个信号流图的输入、输出特性必然相同。转置就是将流图的所有支路方向都反向,并且交换输入与输出,但节点变量值不交换,这样即可以从图 5.6 得到图 5.16(b)或者从图 5.16(b)得到图 5.6,因而对每一种按时间抽取 FFT 流图都存在一个按频率抽取 FFT 流图。

同理,把图 5.5、图 5.9~图 5.12 的信号流图分别加以转置,就可得到各种 DIF 的 FFT 流图。

5.5 快速傅里叶逆变换(IFFT)算法

本节将研究离散傅里叶逆变换的快速算法。由 IDFT 公式

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (5.29)$$

与 DFT 公式

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (5.30)$$

比较可以看出,只要把 DFT 运算中的每一个系数 W_N^{nk} 换成 W_N^{-nk} ,并且最后再乘以常数 $1/N$,则以上所有时间抽取或频率抽取的 FFT 算法都可以拿来运算 IDFT。例如,可以直接由频率抽取的流图即图 5.16(a)出发,把 W_N^{nk} 换成 W_N^{-nk} ,并且在每列(级)运算中都乘上 $1/2$ 因子(因为乘 $1/N$ 等效于乘 $\frac{1}{N} = \frac{1}{2^L} = \left(\frac{1}{2}\right)^L$,相当于每列都乘以 $1/2$ 因子),这样可得到图 5.17 所示的 IFFT 信号流图。当把频率抽取的 FFT 流图用于 IDFT 时,由于输出变量变成 $x(n)$,此时是按 $x(n)$ 的奇偶分组,因而应改称时间抽取 IFFT 流图。同样,如果将时间抽取 FFT 流图用于 IDFT 时,由于输入变成 $X(k)$,则是按输入 $X(k)$ 的奇偶分组,因而应改称为频率抽取 IFFT 流图。

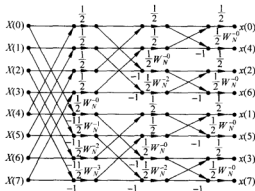


图 5.17 时间抽取 IFFT 流图($N=8$)

以上讨论的 IDFT 算法,编程序很方便,只要稍稍改动 FFT 的程序和参数就能实现。下面讨论一种完全不用改变 FFT 的程序就能计算 IFFT 的方法。

将 IDFT 公式(5.29)两边同时取共轭可得

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]$$

因而

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \{ \text{DFT}[X^*(k)] \}^* \quad (5.31)$$

这说明,只要先将 $X(k)$ 取共轭,就可以直接利用 FFT 子程序,然后再将 FFT 运算结果取一次共轭,并乘以 $1/N$,即得到 $x(n)$ 值,这样 FFT 和 IFFT 运算就可以共用一个子程序块,非常方便。

5.6 N 为复合数的 FFT 算法

前面讨论的是序列长度为 2^L 的基-2FFT 算法,这种算法在实际中使用得最多,因为其程序简单,效率高,使用方便。但若序列长度不满足 $N=2^L$,则可用以下两种方法:

(1) 用补零的办法将序列 $x(n)$ 增长到 2^L 。例如 $N=27$,若要使用基-2FFT 算法,可在序列 $x(n)$ 的末尾补 5 个 0,使 N 达到 $N=2^5=32$ 。由 DFT 的性质知道,有限长序列补零之后,并不影响其频谱 $X(e^{j\omega})$ 的形状,只不过其频谱的取样点数增加了,从而使计算量增加。但是,有时计算量增加太多,会造成很大的浪费。例如 $x(n)$ 的点数 $N=300$,则须补到 $N=2^9=512$,共补 212 个零值点,需要增加很多存储单元。因而人们开始研究 $N \neq 2^L$ 情况下的 FFT 算法。

(2) 如果要求准确的 N 点 DFT,而 N 又是素数,则只能采用直接 DFT 方法,或者用后面介绍的线性调频 Z 变换方法。若 N 是一个复合数,即它可以分解为一些整数因子的乘积,则可以用 FFT 的一般算法,即混合基 FFT 算法,前面介绍的基-2 算法只是这种一般算法的特例。接下来将举例介绍合数分解 FFT 算法的原理。

设序列 $x(n)$ 的长度为 N ,且 N 等于两个整数 p 和 q 的乘积,即 $N=pq$,则可以将 N 点的 DFT 分解成 p 个 q 点 DFT 或 q 个 p 点 DFT 来计算。下面将 $x(n)$ 分为 p 组,每组有 q 个序列值,即

$$p \text{ 组 } \begin{cases} x(pr) \\ x(pr+1) \\ \vdots \\ x(pr+p-1) \end{cases}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1 \quad (5.32)$$

例如, $N=18=3 \times 6$,即 $p=3, q=6$,也就是将 $x(n)$ 分为 3 组,每组各有 6 个序列值,即

$$p = 3 \text{ 组 } \begin{cases} x(0) & x(3) & x(6) & x(9) & x(12) & x(15) \\ x(1) & x(4) & x(7) & x(10) & x(13) & x(16) \\ x(2) & x(5) & x(8) & x(11) & x(14) & x(17) \end{cases}$$

然后,将 N 点 DFT 分解为 p 组来计算,即

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} x(pr) W_N^{prk} + \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+1) W_N^{(pr+1)k} + \dots + \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+p-1) W_N^{(pr+p-1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} x(pr) W_N^{prk} + W_N^k \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+1) W_N^{prk} + \dots + W_N^{(p-1)k} \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+p-1) W_N^{prk} \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} W_N^{lk} \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+l) W_N^{prk} \end{aligned} \quad (5.33)$$

由于 $W_N^{prk} = W_{N/p}^k = W_q^k$, 因此

$$Q_l(k) = \sum_{r=0}^{q-1} x(pr+l)W_q^{rk} \quad (5.34)$$

式(5.34)是一个 q 点 DFT, 这样式(5.33)可写成

$$X(k) = \sum_{l=0}^{p-1} W_N^{lk} Q_l(k) \quad (5.35)$$

式(5.35)说明: 一个 $N=pq$ 的 DFT 可以用 p 个 q 点 DFT 来完成, 如图 5.18 所示。图 5.19 所示的是 $N=p \times q=3 \times 2$ 的例子。

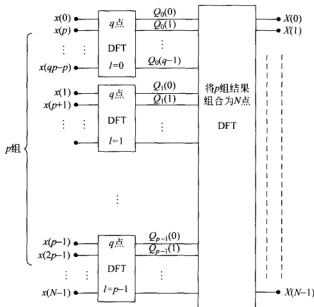


图 5.18 一个 $N=pq$ 点的 DFT 分组示意图

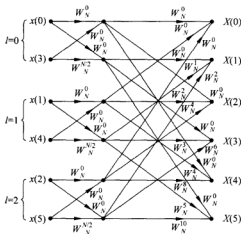


图 5.19 一个 $N=6=3 \times 2$ 的 DFT 流图

现在来考虑更一般的情况,设

$$N = p_1 p_2 \cdots p_m \quad (5.36)$$

其中 $p_1 \sim p_m$ 是 m 个素数因子。首先把 N 分解为两个因子,即 $N = p_1 q_1$,其中 $q_1 = p_2 p_3 \cdots p_m$,并用以上讨论的方法将DFT分解为 p_1 个 q_1 点DFT;然后,将 q_1 分解为 $q_1 = p_2 q_2$,其中 $q_2 = p_3 p_4 \cdots p_m$,即将每一个 q_1 点DFT分解为 p_2 个 q_2 点DFT;这样,通过 m 次分解,最后达到 p_m 点DFT。这种算法可以使DFT的运算获得最高效率。

5.7 线性调频Z变换算法

利用前面介绍的FFT算法可以很快算出全部DFT值,这些值也就是算出有限长序列 $x(n)$ 的Z变换 $X(z)$ 后,在Z平面单位圆上 N 个等间隔取样点 z_k 处的取样值。FFT算法要求 N 为高度复合数。

在实际应用中,有时只对信号的某一频段感兴趣,或只需要计算单位圆上某一段的频谱值。例如,在对窄带信号进行分析时,希望在窄频带内对频率的取样非常密集,以提高分辨率,带外则不予考虑。如果用DFT方法,则需增加整个周期频域内的取样点数,从而增加了窄带之外不必要的计算量。另外,有时也会对非单位圆上的取样感兴趣。例如在语音信号处理中,常常需要知道其Z变换的极点处的复频率,如果极点位置离单位圆较远,只利用单位圆上的频谱就很难知道极点所在处的复频率,此时就需要取样点在接近这些极点的曲线上。再有,如果 N 是大素数时,不能加以分解,此时该如何有效地计算这种序列的DFT呢?

要解决以上几个问题,可以沿着螺旋线对Z变换取样,并通过FFT快速计算。这种沿螺旋线取样计算的Z变换,称为线性调频Z变换(简称CZT)。

5.7.1 CZT 算法原理

一个长度为 N 的序列 $x(n)$,其Z变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (5.37)$$

为了使 z 可以沿着Z平面更一般的路径(不只是单位圆)取值,可以沿一段螺旋线对 z 作等分角取样,这些取样点上的 z_k 可表示为

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, M-1 \quad (5.38)$$

其中 M 为所要分析的复频率的点数,不一定等于 N 。另外, W 和 A 为任意复数,可分别表示为

$$W = W_0 e^{-j\varphi_0} \quad (5.39)$$

$$A = A_0 e^{j\theta_0} \quad (5.40)$$

将式(5.39)和式(5.40)代入式(5.38)得

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\varphi_0} = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\varphi_0)} \quad (5.41)$$

取样点 z_k 所在的路径如图5.20所示,图5.20中:

(1) A_0 表示起始取样点 z_0 的矢量长度,通常 $A_0 \leq 1$,否则取样点将处于单位圆 $|z|=1$

之外。

(2) θ_0 表示起始取样点 z_0 的矢量相角,它可以是正值或负值。

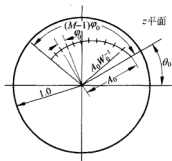


图 5.20 线性调频 Z 变换在 z 平面的螺旋线取样

(3) φ_0 表示两相邻取样点矢量之间的角度差。 φ_0 为正时,表示 z_k 的路径沿逆时针方向旋转; φ_0 为负时, z_k 的路径沿顺时针方向旋转。

(4) W_0 表示螺旋线的伸展率。 $W_0 > 1$ 时,随着 k 的增加,螺旋线向内盘旋; $W_0 < 1$ 时,则随 k 的增加,螺旋线向外盘旋; $W_0 = 1$ 对应于半径为 A_0 的一段弧线,在 $A_0 = 1$ 时这段弧线是单位圆的一部分。

在 $M = N$, $A = A_0 e^{j\theta_0} = 1$, $W = W_0 e^{-j\varphi_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

(即 $W_0 = 1$, $\varphi_0 = \frac{2\pi}{N}$) 的特殊情况下,各 z_k 值等间隔均匀分布在单位圆上,这对应于计算序列的 DFT。

将式(5.38)代入式(5.37)得

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^n = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nk}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (5.42)$$

直接计算式(5.42),总共要算 M 个取样点,需要 NM 次复数乘法和 $(N-1)M$ 次复数加法,这与 DFT 的直接计算类似。当 N 和 M 很大时,这个计算量是很大的,因而限制了运算速度。如果将式(5.42)中的因子 W^{nk} 的幂 nk 作如下的变换,则可以将以上运算转换成卷积的形式,并可采用 FFT 来计算,从而大大提高运算速度。具体来说,将 nk 写成以下形式:

$$nk = \frac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2] \quad (5.43)$$

将式(5.43)代入式(5.42)得

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{n^2/2} W^{-(k-n)^2/2} W^{k^2/2} \\ &= W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) A^{-n} W^{n^2/2}] W^{-(k-n)^2/2} \end{aligned}$$

令

$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{n^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.44)$$

和

$$h(n) = W^{-n^2/2} \quad (5.45)$$

则

$$X(z_k) = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.46)$$

从式(5.46)可看出,可以通过计算 $g(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积,然后再乘以系数 $W^{k^2/2}$ 来得到 $X(z_k)$,即

$$X(z_k) = W^{k^2/2} [g(n) * h(n)] = W^{k^2/2} q(k), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (5.47)$$

式(5.47)的计算可用图 5.21 来表示。

序列 $g(n)$ 可被看成是一个具有二次相位的复指数序列,这种信号在雷达系统中称为

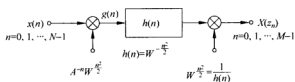


图 5.21 线性调频 Z 变换的计算流程图

chirp 信号(线性调频信号),线性调频 Z 变换的名称即来源于此。

5.7.2 CZT 变换的实现步骤

从式(5.46)可看出,线性系统 $h(n)$ 是一个非因果系统,因为当 n 从 0 到 $N-1$, k 从 0 到 $M-1$ 取值时, $h(n)$ 在 $n=-(N-1)$ 到 $n=M-1$ 之间有非零值, $h(n)$ 是一个长度为 $N+M-1$ 的有限长序列,如图 5.22(a)所示。输入信号 $g(n)$ 是长度为 N 的有限长序列。因此, $g(n) * h(n)$ 的长度为 $2N+M-2$ 。如果用循环卷积来计算线性卷积,为了不产生混叠失真,要求循环卷积的点数大于或等于 $2N+M-2$ 。但是,由于只需要前 M 个 $X(z_k)$ 值,其他值是否有混叠失真并不重要,所以循环卷积的点数可以减到最小为 $N+M-1$,即 $L \geq N+M-1$ 。

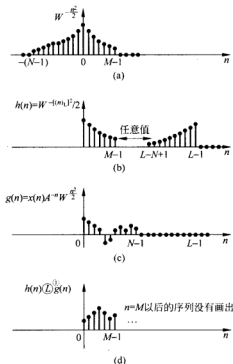


图 5.22 CZT 变换的循环卷积所用到的序列

① ②表示对 L 点的循环卷积。

$M-1$ 。为了能使用基-2FFT 算法, L 还应取满足 $L=2^K$ 的最邻近的值。这样, 首先从 $n=M$ 到 $n=L-N$, 对 $h(n)$ 添补 $L-(N+M-1)$ 个零或任意取样值, 使 $h(n)$ 长为 L ; 然后, 将 $h(n)$ 延拓成周期为 L 的周期序列, 并取出主值序列, 如图 5.22(b) 所示。这就是进行循环卷积运算的一个序列。进行循环卷积运算的另一个序列是对 $g(n)$ 补零至 L 点得到的, 如图 5.22(c) 所示。

由上可以列出 CZT 运算的步骤:

(1) 选择满足条件 $L \geq N+M-1$ 和 $L=2^K$ 的整数 L 值。

(2) 将 $g(n)$ 补零值, 变为长度为 L 点的序列, 并利用 FFT 算法求此序列的 L 点 DFT, 得

$$G(r) = \sum_{n=0}^{L-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0 \leq r \leq L-1 \quad (5.48)$$

(3) 按下式构造长为 L 的序列 $h(n)$, 在 $n=0 \sim M-1$ 一段 $h(n) = W^{-n^2/2}$, 在 $n=M \sim L-N$ 一段取 $h(n)$ 为任意值 (一般为零), $n=L-N+1 \sim L-1$ 一段取 $h(n)$ 为 $W^{-n^2/2}$ 的周期延拓序列 $W^{-(L-n)^2/2}$, 即有

$$h(n) = \begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}} & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 (\text{或任意值}) & M \leq n \leq L-N \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}} & L-N+1 \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad (5.49)$$

式(5.49)的 $h(n)$ 可如图 5.22(b) 所示。实际上它就是图 5.22(a) 的序列以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。

对式(5.49)定义的 $h(n)$ 序列, 用 FFT 求其 L 点的 DFT

$$H(r) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0 \leq r \leq L-1$$

(4) 将 $H(r)$ 和 $G(r)$ 相乘得 $Q(r) = H(r)G(r)$, $Q(r)$ 为 L 点频域离散序列。

(5) 用 IFFT 求 $Q(r)$ 的 L 点 IDFT, 得到 $h(n)$ 与 $g(n)$ 的循环卷积 $q(k)$ 。此循环卷积是按 $L(L \geq N+M-1)$ 点作的, $g(n)$ 的实际列长仅为 N , 当 $h(n)$ 按式(5.49)取出时, $h(n)$ 与 $g(n)$ 循环卷积的前 M 个等于 $h(n)$ 与 $g(n)$ 线性卷积结果的点, 恰恰就是我们所需要的范围 $q(k)$, $q(k)$ 在 $k \geq M$ 之后的值没有意义可以不必去求。

(6) 将 $q(k)$ 代入式(5.47), 可求出 M 个点 $X(z_k)$ 值:

$$X(z_k) = W^{k^2/2} q(k), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (5.50)$$

5.7.3 运算量的估算

用 CZT 算法求 $X(z_k)$ 比直接用 DFT 求 $X(z_k)$ 的算法有效得多, CZT 所需的乘法如下:

(1) 形成 L 点序列 $g(n) = x(n)A^{-n^2/2}$, 但只有 N 点有序列值, 需要 N 次复乘, 而系数 $A^{-n^2/2}$ 可事先计算好并预存在存储器内。为了节约存储容量, 也可以递推求得。令

$$C_n = A^{-n^2/2} \quad (5.51)$$

$$D_n = W^n W^{\frac{1}{2}} A^{-1} = W^n D_0 = W D_{n-1} \quad (5.52)$$

其中
则

$$C_{n+1} = A^{-(n+1)} W^{\frac{(n+1)^2}{2}} = (A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}) (W^n W^{\frac{1}{2}} A^{-1}) = C_n \cdot D_n \quad (5.53)$$

其起始条件为 $C_0=1, D_0=W^{\frac{1}{2}} A^{-1} = \frac{\sqrt{W_0}}{A_0} e^{-j(\frac{\theta_0}{2}+\theta_0)}$, 所以只要预先将 D_0 及 $W=W_0 e^{-j\theta_0}$ 给定, 便可利用式(5.52)及式(5.53)递推求出 N 个系数 $A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}$ 。由此看出, 这种递推运算只需 $2N$ 次复乘。

(2) 形成 L 点序列 $h(n)$ 。因为它是由 $W^{-n^2/2}$ 在 $-(N-1) \leq n \leq M-1$ 段内的序列值构成, 而 $W^{-n^2/2}$ 是偶对称序列, 如果设 $N > M$, 则只需求得 $0 \leq n \leq N-1$ 一段 N 点序列值即可, 与(1)相似, $W^{-n^2/2}$ 的这些数值可以递推求得, 因而只需 $2N$ 次复乘。

(3) 计算 $G(r), H(r), q(k)$ 共需三次 FFT(或 IFFT), 共需要 $\frac{3}{2} L \log_2 L$ 次复乘。

(4) 计算 $Q(r) = H(r)G(r)$ 需要 L 次复乘。

(5) 计算 $X(z_k) = W^{k^2/2} q(k) (0 \leq k \leq M-1)$ 需要 M 次复乘。

综上所述, CZT 总的复数乘法次数为

$$\frac{3}{2} L \log_2 L + 3N + 2N + L + M = \frac{3}{2} L \log_2 L + 5N + L + M$$

如果由式(5.47)直接计算 M 点的 Z 变换值 $X(z_k)$, 就需要 NM 次复数乘法。当 N, M 足够小时, 直接算法的运算量也不大, 但是当 N, M 都比较大时(例如 N, M 都大于 50 时), CZT 的 FFT 算法比直接算法的运算量要小得多。

由以上讨论看出, CZT 算法非常灵活, 其输入序列长度 N 和输出序列长度 M 可以不相等, 且 N 和 M 均可为任意数, 包括素数; 各 z_k 点间的角度间隔 φ_0 可以是任意的, 因而频率分辨率可以调整; 计算 Z 变换的周线可以不是圆而是螺旋线; 另外, 起始点 z_0 可以任意选定, 也就是说可从任意频率开始对输入数据进行分析, 便于做窄带高分辨率的分析; 在特定情况下($A=1, M=N, W=e^{j\frac{2\pi}{N}}$), CZT 变成 DFT(即使 N 为素数也行)。

5.8 Matlab 实现

本节将继续给出利用 FFT 作谱分析和利用线性调频 Z 变换作谱分析的 Matlab 实例。其中, 在 Matlab 中使用的线性调频 Z 变换函数为 CZT, 其调用格式为

```
>> X = czt(x, M, W, A)
```

其中, x 是待变换的时域信号 $x(n)$, 其长度为 N ; M 是变换的长度; W 确定变换的步长; A 确定变换的起点。若 $M=N, A=1$, 则 CZT 变成 DFT。

5.8.1 用 FFT 进行谱分析的 Matlab 实现

例 5.1 设模拟信号 $x(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$, 以 $t = 0.01n (n=0; N-1)$ 进行取样, 试用 FFT 函数对其做频谱分析。N 分别为: (1) $N=45$; (2) $N=50$; (3) $N=55$; (4) $N=60$ 。

解 程序如下:

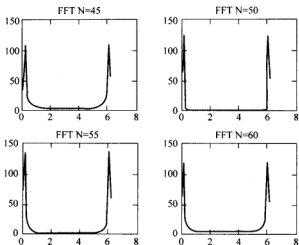
```
>>N=45;n=0:N-1;t=0.01*n;          % 计算 N=45 的 FFT 并绘出其幅频曲线
q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(q,abs(y))
title('FFTN=45')
```

```
N=50;n=0:N-1;t=0.01*n;          % 计算 N=50 的 FFT 并绘出其幅频曲线
q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
figure(1)
subplot(2,2,2)
plot(q,abs(y))
title('FFTN=50')
```

```
N=55;n=0:N-1;t=0.01*n;          % 计算 N=55 的 FFT 并绘出其幅频曲线
q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
figure(1)
subplot(2,2,3)
plot(q,abs(y))
title('FFTN=55')
```

```
N=60;n=0:N-1;t=0.01*n;          % 计算 N=60 的 FFT 并绘出其幅频曲线
q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
figure(1)
subplot(2,2,4)
plot(q,abs(y))
title('FFTN=60')
```

程序运行后可得如图 5.23 所示的信号谱,可以看出,这几种情况下均有较好的精度。

图 5.23 $x(t)$ 的信号频谱

例 5.2 在例 5.1 的基础上,取 $N=64$,并在信号中加入噪声(正态) $w(t)$,即

$$x(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t) + 0.8w(t)$$

试比较有无噪声时的信号频谱。

解 程序如下:

```
>>> N = 64; n = 0:N-1; t = 0.01 * n; % 求不带噪声序列的幅频特性
q = n * 2 * pi / N;
x = 2 * sin(4 * pi * t) + 5 * cos(8 * pi * t); % 产生不带噪声的序列
y = fft(x, N);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(q, abs(y))
title('FFTN = 64')

N = 64; n = 0:N-1; t = 0.01 * n; % 求带正态噪声序列的幅频特性
q = n * 2 * pi / N;
x = 2 * sin(4 * pi * t) + 5 * cos(8 * pi * t) + 0.8 * randn(1, N); % 产生带正态噪声的序列
y = fft(x, N);
figure(1)
subplot(2,1,2)
plot(q, abs(y))
title('FFTN = 64(Withnoise)')
```

程序运行后可得如图 5.24 所示的信号频谱,可以看出,在信号检测的意义上,这种噪声不会影响信号的检测。

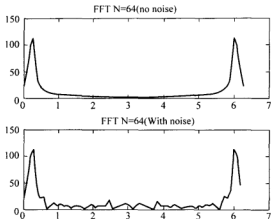


图 5.24 有、无噪声时的信号频谱

5.8.2 用 CZT 进行谱分析的 Matlab 实现

例 5.3 利用 ChirpZ 变换计算滤波器 h 在 $100 \sim 200\text{Hz}$ 的频率特性, 并比较 CZT 和 FFT 函数。

解 首先利用函数 `firl` 设计一个线性相位的 FIR 数字滤波器。程序如下:

```
>>h=firl(30,125/500,boxcar(31)); % 线性相位的 FIR 数字滤波器,截止频率为 125Hz
fs=1000; % fs 为取样频率
f1=100;
f2=200;
m=1024;
w=exp(-j*2*pi*(f2-1)/(m*fs));
a=exp(j*2*pi*f1/fs);
Y=fft(h,m); % 作 1024 点的 FFT
z=czt(h,m,w,a); % 进行 1024 点的 CZT
fy=(0:length(Y)-1)*fs/length(Y);
fz=(0:length(z)-1)*(f2-f1)/length(z)+f1;

subplot(2,1,1)
plot(fy(1:500),abs(Y(1:500))) % 数字频率周期为  $2\pi$ , 1:500 表示只画出半周期
title('FFT')

subplot(2,1,2)
plot(fz,abs(z))
title('CZT')
```

程序运行结果如图 5.25 所示,可以看出,利用 CZT 可以进行窄频带分析,所分析的频段信息更加详细。

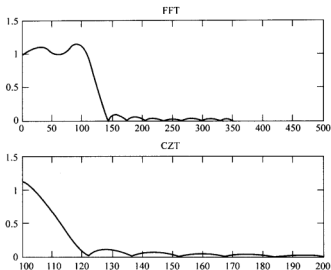


图 5.25 FFT 和 CZT 计算的幅频率响应

习 题

5.1 如果一台通用计算机的速度为平均每次复数乘法 $5\mu\text{s}$, 每次复数加法 $0.5\mu\text{s}$, 用它来计算 512 点的 DFT $[x(n)]$, 问直接计算需要多少时间? 用 FFT 运算需要多少时间?

5.2 假设一次复乘需要 $1\mu\text{s}$, 计算一个 DFT 总共需要的时间由计算所有乘法所需要的时间决定。计算:

- (1) 直接计算一个 1024 点的 DFT 需要多少时间?
- (2) 计算一个 FFT 需要多少时间?
- (3) 对 4096 点 DFT 重复问题(1)和(2)。

5.3 已知 $X(k)$ 、 $Y(k)$ 是两个 N 点实序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 DFT 值, 今需从 $X(k)$ 、 $Y(k)$ 求 $x(n)$ 、 $y(n)$ 值, 为了提高运算效率, 试用一个 N 点 IFFT 运算一次完成。

5.4 $N=16$ 时画出基-2 按时间抽取法及按频率抽取法的 FFT 信号流图(按时间抽取采用输入倒位序、输出自然顺序; 按频率抽取采用输入自然顺序、输出倒位序)。

5.5 试用 N 为组合数时 FFT 算法求出 $N=12$ 的结果(采用混合基- 3×4), 并画出信号流图。

5.6 已知一个 8 点序列

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试用 CZT 法求其前 10 点的复频谱 $X(z_k)$ 。已知 Z 平面路径为 $A_0=0.8$, $\theta_0=\frac{\pi}{3}$, $W_0=0.2$,

$\phi_0=\frac{2\pi}{20}$, 画出 z_k 的路径及 CZT 实现过程示意图。

5.7 用 C 语言编写程序 FFT 算法。要求

(1) 按时域抽取基-2FFT 算法;

(2) 按频率抽取基-2FFT 算法。

5.8 对于长度为 8 点的实序列 $x(n)$, 试问如何利用长度为 4 点的 FFT 计算 $x(n)$ 的 8 点 DFT? 写出其表达式, 并画出简略流程图。

5.9 已知序列 $x(n) = \{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$, 用时间抽取 FFT 算法求 $x(n)$ 的 6 点 DFT。请写出推导过程, 画出完整的 FFT 流程图并算出结果。

数字滤波器的基本结构

6.1 引言

数字滤波器是指输入输出均为数字信号,通过一定的运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。数字滤波器是在模拟滤波器的基础上发展起来的,与模拟滤波器相比,数字滤波器的优点是精度高、稳定、灵活、便于大规模集成及不存在阻抗匹配问题等,因此数字滤波器在许多领域得到广泛应用。

数字滤波器可以有两种实现方法:一种是在专用数字信号处理硬件电路上实现,另一种是通过编写程序在计算机上实现。数字滤波器的网络结构是数字滤波器设计的一个非常重要的内容,数字滤波器的稳定性、运算速度以及系统的成本和体积等许多重要性能都取决于其网络结构。对于同一个系统函数,可以有多种不同的网络结构。本章主要讨论数字滤波器的常用网络结构及其性能。

6.2 数字滤波器的基本概念

6.2.1 数字滤波器的描述

一个数字滤波器可以用差分方程来描述,即

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6.1)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (6.2)$$

从式(6.1)可以看出,实现数字滤波器需要三种基本运算单元,即加法器、单位延迟器和常数乘法器。这些基本的单元可以有两种表示法:方框图法和信号流图法,如图6.1所示。 z^{-1} 与系数 a 作为支路增益写在支路箭头旁边,箭头表示信号流动方向。如果支路增益为1,可以省略不写。

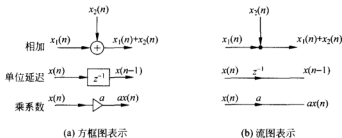


图 6.1 基本运算单元的方框图表示及流图表示

因此,一个数字滤波器的运算结构也有两种表示方法。例如一个二阶数字滤波器用差分方程表示

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \quad (6.3)$$

对应的方框图和流图如图 6.2 所示。

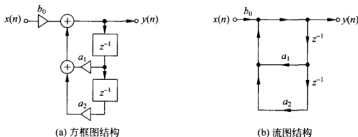


图 6.2 二阶数字滤波器的方框图和流图结构

图 6.2 是一个有向图结构,图中圆点称为节点,节点之间用有向支路相连接。 $x(n)$ 处为输入节点或源节点,表示注入流图的外部输入或信号源,没有输入支路。 $y(n)$ 处为输出节点,没有输出支路。每个中间节点与输入支路和输出支路相连,其值等于与其相连的输入支路信号之和。而输入支路的信号值等于这一支路起点处节点信号值乘以支路上的传输系数。数字滤波器的两种表示方法等效,只是符号上的差异。用方框图表示较明显直观,用流图表示则更加简单方便。

6.2.2 数字滤波器的分类

数字滤波器的种类很多,分类方法也不同,但总的来说,可以分为两大类,即经典滤波器 and 现代滤波器。经典滤波器是假定输入信号中有用成分和希望滤除的成分各占不同的频带,通过一个合适的选频滤波器可以滤除干扰成分。但是如果信号和噪声的频谱相互重叠,经典滤波器就无法将信号与噪声区分开。而现代滤波器则利用信号和噪声的统计特征,从干扰中最佳地提取信号。本书只讨论经典滤波器。

数字滤波器从功能上可以分为四种,即低通、高通、带通和带阻滤波器,对应的理想幅频特性如图 6.3 所示,从图中可以看出数字滤波器的幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 是以 2π 为周期的周期函数,滤波器的低频部分处于 2π 的整数倍处,而高频部分处于 π 的奇数倍附近,这一点和模

拟滤波器是有区别的。理想数字滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 是非因果的且是无限长的, 因此实际中是不可实现的。数字滤波器的设计就是在某些准则下对理想滤波器幅频特性曲线的逼近, 保证滤波器物理上可实现。

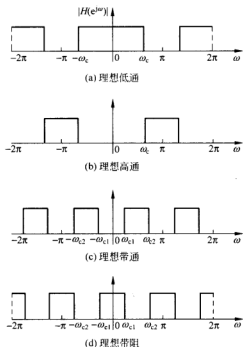


图 6.3 理想的低通、高通、带通和带阻数字滤波器的幅频特性

数字滤波器根据其单位脉冲响应长度可分为无限脉冲响应(IIR)滤波器和有限脉冲响应(FIR)滤波器。IIR 滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6.4)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (6.5)$$

IIR 滤波器在结构上存在输出到输入的反馈。

FIR 滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6.6)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (6.7)$$

FIR 滤波器在结构上不存在输出到输入的反馈, 信号流图中不存在环路。

6.3 无限脉冲响应滤波器的结构

无限脉冲响应滤波器的单位脉冲响应是无限长的,存在输出到输入之间的反馈,结构上是递归型的。IIR 滤波器有直接型、正准型、级联型和并联型四种基本网络结构。

6.3.1 直接型

IIR 数字滤波器的差分方程和系统函数由式(6.4)和式(6.5)描述。从式(6.4)可以看出, $y(n)$ 由两部分相加构成。 $\sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$ 表示输入的 M 节延迟的线性组合, $\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ 表示输出的 N 节延迟的线性组合,其结构流图如图 6.4 所示,这种结构称为直接型结构。该网络结构由两个网络级联组成,第一个网络对应于式(6.4)右边的第二个和式,实现系统零点,第二个网络对应于式(6.4)右边的第一个和式,是一个反馈结构,实现系统极点。从图中可以看出,直接型结构需要 $N+M$ 级延时单元。

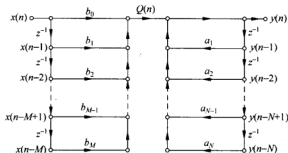


图 6.4 IIR 数字滤波器的直接型结构

6.3.2 正准型

从图 6.4 可以看出,直接型结构由两个网络级联组成。设这两个网络的系统函数分别为 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$,那么整个 IIR 数字滤波器的系统函数可以表示为

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (6.8)$$

对于线性非移变系统,交换 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的次序,整个系统的传输函数不变,即

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$$

将图 6.4 中的两个网络交换次序,可得到 IIR 数字滤波器的另一种网络结构。在这种结构中,两个网络具有相同的延迟支路,可以将其合并,得到如图 6.5 所示的结构,与直接型相比,这种结构延迟单元比直接型少,称为正准型结构,也称为典范型结构。

转置定理 如果将原网络中所有支路的方向加以反转,并将输入和输出加以相互交换,则网络的系统函数不会改变。将转置定理应用于图 6.5 所示的正准型结构,按照习惯,将输入画在左边,输出画在右边,则得到如图 6.6 所示的 IIR 滤波器正准型的转置结构。

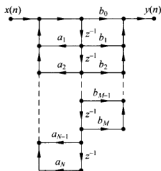


图 6.5 IIR 数字滤波器的正准型结构

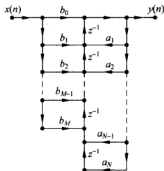


图 6.6 正准型的转置结构

6.3.3 级联型

将式(6.4)表示的系统函数按零点、极点进行因式分解,则可将它表示成

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (6.9)$$

式中 A 是常数, c_k 和 d_k 分别表示零点和极点。由于系统函数 $H(z)$ 的系数 a_k 和 b_k 都是实数,因此 c_k 和 d_k 是实数或者共轭复数,那么,式(6.9)可写为

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - h_k z^{-1})(1 - h_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})} \quad (6.10)$$

式中 $M = M_1 + 2M_2$, $N = N_1 + 2N_2$, g_k 表示实零点, p_k 表示实极点, h_k 和 h_k^* 表示复共轭零点, q_k 和 q_k^* 表示复共轭极点。将相互共轭的零点(极点)合并起来,形成一个实系数的二阶多项式。因此

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})} \quad (6.11)$$

为了简化级联形式,将实系数的两个一阶因子组合成二阶因子,则整个 $H(z)$ 可写成实系数二阶因子的形式

$$H(z) = A \prod_{k=1}^L \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_{k=1}^L H_k(z) \quad (6.12)$$

其中 $H_k(z) = \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$, L 取 $\frac{N+1}{2}$ 的整数部分。每一个二阶子系统 $H_k(z)$ 称为二阶基本节,采用正准型网络结构实现。一个六阶节系统的级联实现如图 6.7 所示。

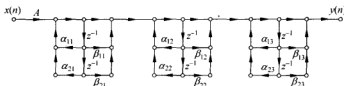


图 6.7 六阶 IIR 滤波器的级联结构

级联型结构的特点是每一个基本节与滤波器的一对极点和一对零点有关。调整系数 β_{1k}, β_{2k} 可以单独调整滤波器第 k 对零点,而不影响其他零点、极点。同样,调整系数 α_{1k}, α_{2k} 就单独调整滤波器第 k 对极点,而不影响其他零点、极点。所以这种结构,便于准确实现滤波器零点、极点,因而便于调整滤波器频率响应特性。

6.3.4 并联型

将式(6.4)表示的系统函数 $H(z)$ 展开成部分分式之和,即

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - g_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k} \quad (6.13)$$

式中 $N = N_1 + 2N_2$, 由于式中系数 a_k, b_k 是实数,故 A_k, B_k, g_k, c_k 和 G_k 都是实数。如果 $M < N$, 则式(6.13)中不包含 $\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$ 项; 如果 $M = N$, 则 $\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$ 项变成 G_0 项。一般 IIR 滤波器都满足 $M \leq N$ 的条件。式(6.13)表示系统是由 N_1 个一阶系统、 N_2 个二阶系统和各延时加权单元并联组合而构成。以 $M = N = 3$ 为例,其结构实现如图 6.8 所示,每个一阶或二阶子系统可用正准型实现。

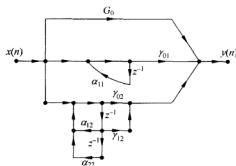


图 6.8 并联型结构

并联结构可以单独调整极点位置,但不能像级联型那样单独调整零点的位置,因为并联型各子系统的零点,并非整个系统函数的零点。此外,并联结构中,各并联基本节的误差相

互没有影响,因此,并联形式运算误差最小。由于基本节并联,可同时对输入信号进行运算,因此并联型结构运算速度较快。

6.4 有限脉冲响应滤波器的结构

有限脉冲响应滤波器(FIR)的差分方程和系统函数分别由式(6.6)和式(6.7)描述,其单位脉冲响应是有限长的,其网络结构没有反馈支路,即没有环路。FIR 滤波器的基本结构形式有直接型、级联型、线性相位结构和频率取样型四种结构。

6.4.1 直接型

将式(6.6)表示的 FIR 滤波器系统函数写为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$$

可以得出系统的直接型结构如图 6.9 所示。

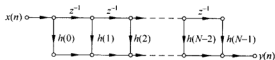


图 6.9 FIR 滤波器的直接型结构

这种结构也称为横向滤波器结构或者卷积型结构。将转置定理用于图 6.9,可得到如图 6.10 所示的转置直接型结构。



图 6.10 图 6.9 所示滤波器的转置结构

6.4.2 级联型

将式(6.6)表示的系统函数分解成一阶和二阶因子的乘积形式

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=0}^{N_1} (a_{0k} + a_{1k}z^{-1}) \prod_{k=0}^{N_2} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (6.14)$$

其中每一个因子都可用直接型实现。级联型结构每一个一阶因子控制一个零点,每一个二阶因子控制一对共轭零点,因此调整零点位置比直接型方便。但是它所需要的系数比直接型多,因而需要的乘法器较多。

6.4.3 线性相位结构

在很多场合下,要求设计的滤波器具有线性相位特性。滤波器的传输函数为

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (6.15)$$

其中 $H(\omega)$ 为幅频特性, $\theta(\omega)$ 为相频特性。线性相位特性是指滤波器的相移和频率成线性关系,即

$$\theta = -\tau\omega \quad (6.16)$$

式中 τ 为常数。如果 $\theta = \theta_0 - \tau\omega$, θ_0 为常数,也称该相频特性为线性相位。

可以证明,如果 FIR 滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 为实数,且满足

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad (6.17)$$

则滤波器具有线性相位。下面分四种情况进行证明。

1. 当 $h(n)$ 为偶对称 ($h(n) = h(N-1-n)$)

1) N 为奇数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (6.18)$$

将 $m = N-1-n$ 代入式 (6.18) 右边第三项,得到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} h(N-1-m)z^{-(N-1-m)} \quad (6.19)$$

由于 $h(n) = h(N-1-n)$, 因此上式右边第一项和第三项可以合并,即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-m)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (6.20)$$

令 $z = e^{j\omega}$, 可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}$$

令 $m = \frac{N-1}{2} - n$, 代入上式可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right)\cos(\omega m) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \quad (6.21)$$

再令 $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$, $a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$, $n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, 则式 (6.21) 可以写成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos(\omega n) \right\} \quad (6.22)$$

因此,幅频特性和相频特性分别为

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n) \quad (6.23)$$

和

$$\varphi(\omega) = -\omega(N-1)/2 \quad (6.24)$$

由于 $\cos(\omega n)$ 对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 皆为偶对称, 因此幅频特性对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 是偶对称的。由式(6.20)可得其网络结构如图 6.11 所示。

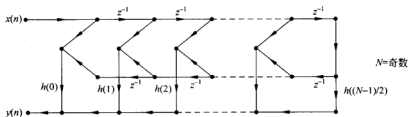


图 6.11 当 $h(n)$ 为偶对称, N 为奇数时的网络结构

2) N 为偶数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

将 $m=N-1-n$ 代入上式右边第二项, 得到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-m-1) z^{-(N-m-1)}$$

由于 $h(n)=h(N-1-n)$, 因此上式右边第一项和第二项可以合并, 即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (z^{-n} + z^{-(N-n-1)}) \quad (6.25)$$

令 $z=e^{j\omega}$, 可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

令 $m = \frac{N}{2} - n$, 代入上式可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \left\{ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\omega \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

令 $b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right)$, $n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, 则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.26)$$

因此, 幅频特性和相频特性分别为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (6.27)$$

和

$$\varphi(\omega) = -\omega(N-1)/2 \quad (6.28)$$

对由于 $\cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$ 对 $\omega = \pi$ 是奇对称, 因此幅频特性 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 是奇对称的, 且在 $\omega = \pi$ 处有一零点, 即 $H(\pi) = 0$, 因此频率响应在 $\omega = \pi$ 不为零的滤波器(如高通滤波器和带阻滤波器)不能用这种类型的滤波器来逼近。

由式(6.25)可得其网络结构如图 6.12 所示。

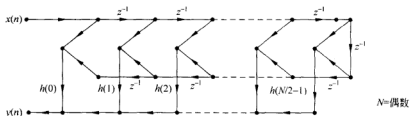


图 6.12 当 $h(n)$ 为偶对称, N 为偶数时的网络结构

2. 当 $h(n)$ 为奇对称 ($h(n) = -h(N-1-n)$)

1) N 为奇数

由于 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(N-1-\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(\frac{N-1}{2}\right)$, 因此 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

将 $m = N-1-n$ 代入上式右边第二项, 得到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)z^{-n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} h(N-1-m)z^{-(N-1-m)}$$

由于 $h(n) = -h(N-1-n)$, 因此上式右边第一项和第二项可以合并, 即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) [z^{-n} - z^{-(N-1-n)}] \quad (6.29)$$

令 $z = e^{j\omega}$, 可得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) [e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} - e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)}] \\ &= e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \right\} \end{aligned}$$

令 $m = \frac{N-1}{2} - n$ 代入上式,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(\omega m) \right\} \quad (6.30)$$

令 $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$, $n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, 则式(6.30)可改写为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n) \right\} \quad (6.31)$$

因此, 幅频特性和相频特性分别为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n) \quad (6.32)$$

和

$$\varphi(\omega) = -\omega(N-1)/2 + \pi/2 \quad (6.33)$$

由式(6.29)可得其网络结构如图 6.13 所示。

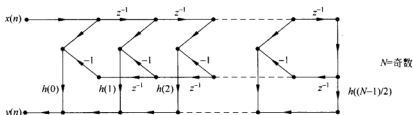


图 6.13 当 $h(n)$ 为奇对称, N 为奇数时的网络结构

2) N 为偶数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

将 $m=N-1-n$ 代入上式右边第二项, 得到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-n-1) z^{-(N-n-1)}$$

由于 $h(n) = -h(N-1-n)$, 因此上式右边第一项和第三项可以合并, 即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (z^{-n} - z^{-(N-n-1)}) \quad (6.34)$$

令 $z = e^{j\omega}$, 可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \right\}$$

令 $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right)$, 则上式可以写为

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \right\} \quad (6.35)$$

因此,幅频特性和相频特性分别为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin(\omega m) \quad (6.36)$$

和

$$\varphi(\omega) = -\omega(N-1)/2 + \pi/2 \quad (6.37)$$

由式(6.34)可得其网络结构如图 6.14 所示。

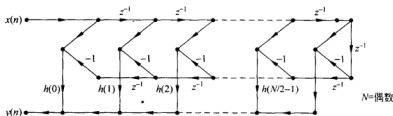


图 6.14 当 $h(n)$ 为奇对称, N 为偶数时的网络结构

现在讨论线性相位 FIR 滤波器的零点分布。由线性相位滤波器单位取样响应 $h(n)$ 的对称性可知

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n}$$

令 $m = N-1-n$, 代入上式, 得

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (6.38)$$

由式(6.38)可以看出, $H(z)$ 的零点也是 $H(z^{-1})$ 的零点, 反之亦然。设 z_k 是 $H(z)$ 的零点, 则 z_k^{-1} 必然也是其零点; 若 $h(n)$ 是实数, 那么 $H(z)$ 的零点必然共轭成对出现, 因此 z_k^* 和 $(z_k^{-1})^*$ 也是其零点。线性相位 FIR 滤波器的零点分布如图 6.15 所示。如果零点在单位圆上, 则零点以共轭对出现; 如果零点在实轴上, 则零点互为倒数出现; 如果零点既在单位圆上, 又在实轴上, 此时只有一个零点。

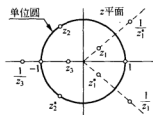


图 6.15 线性相位 FIR 滤波器的零点分布

6.4.4 频率取样型结构

前面指出, 系统函数 $H(z)$ 在单位圆上作 N 等分取样的取样值就是 $h(n)$ 的离散傅里叶变换值 $H(k)$, 即

$$H(k) = H(z) \big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

相应的插值公式为

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^k z^{-1}} \quad (6.39)$$

这个公式就为有限冲激响应滤波器提供了频率取样型结构。将式(6.39)看作两部分级联

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \quad (6.40)$$

其中

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad (6.41)$$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^k z^{-1}} \quad (6.42)$$

$H(z)$ 可以看作由 $H_c(z)$ 和 N 个一阶网络 $H_k(z)$ 的并联结构进行级联而成, 其网络结构如图 6.16 所示。



图 6.16 FIR 滤波器的频率取样型结构

$H_c(z)$ 对应的差分方程为

$$y_1(n) = x(n) + x(n-N) \quad (6.43)$$

它是由 N 节延时单元构成的梳状滤波器, 如图 6.17 所示。梳状滤波器有 N 个零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0,1,2,\dots,N-1$, 在单位圆上等间隔分布。对应的频率响应为

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (6.44)$$

幅度响应为

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right| \quad (6.45)$$

式(6.40)的第二部分是由 N 个一阶网络并联而成, 每个一阶网络都是一个谐振器, 它们在单位圆上各有一个极点

$$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad (6.46)$$

这些谐振器的极点正好与梳状滤波器的零点相抵消, 从而使这些频率点上的频率响应等于 $H(k)$ 。

FIR 滤波器的频率取样结构如图 6.18 所示, 它由一个简单的 FIR 系统和一个 IIR 系统级联而成。

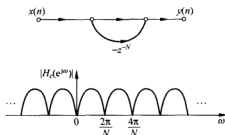


图 6.17 梳状滤波器结构及其幅频特性

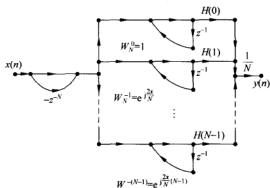


图 6.18 FIR 系统的频率取样结构

频率取样结构的优点在于系数 $H(k)$ 就是滤波器在频率取样点 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的响应, 因此控制滤波器的频率响应比较方便。这种结构的缺点有两个:

(1) 所有谐振网络的极点位于单位圆上, 系统稳定是靠这些极点与梳状滤波器在单位圆上的零点抵消来保证的, 如果滤波器的系数稍有误差, 有些极点就不能被零点所抵消, 从而导致系统不稳定。

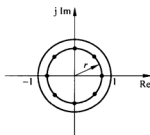


图 6.19 修正的频率取样点

(2) 所有的系数 $H(k)$ 和 W_N^k 都是复数, 复数相乘对硬件实现是不方便的。

为了克服上述缺点, 对频率取样结构进行如下修正: 将单位圆上的极零点向内收缩到半径为 r 的圆上, $r < 1$ 且 $r \approx 1$, 如图 6.19 所示。此时

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} \quad (6.47)$$

其中, $H_r(k)$ 是在半径为 r 的圆上对 $H(z)$ 的 N 点等间隔取样值。由于 $r \approx 1$, 因此可以近似认为 $H_r(k) = H(k)$, 并且

$$H(z) \approx (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} \quad (6.48)$$

如果由于某种原因, 零点与极点不能抵消时, 极点位置仍在单位圆内, 可保持系统稳定。

对实数序列 $h(n)$, 由 DFT 的共轭对称性可知, $H(k) = H^*(N-k)$, 将第 k 和第 $N-k$ 个谐振器合并为一个实系数二阶网络, 从而将复数乘法运算变成实数运算。当 N 为偶数, 式(6.48)可表示为

$$\begin{aligned} H(z) &\approx (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} \right] \\ &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(\frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{(N-k)} z^{-1}} \right) \right] \\ &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(\frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - r(W_N^k)^* z^{-1}} \right) \right] \\ &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right] \quad (6.49) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{0k} &= 2\operatorname{Re}[H(k)] \\ \alpha_{1k} &= -2\operatorname{Re}[rH(k)W_N^k] \\ k &= 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

令

$$H_k(z) = \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (6.50)$$

式(6.50)表示一个实系数二阶网络, 其结构如图 6.20 所示。

将式(6.50)代入式(6.49)可得

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right] \quad (6.51)$$

由式(6.51)可以画出修正的 FIR 滤波器频率取样结构,如图 6.21 所示。

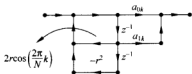


图 6.20 修正的二阶谐振网络

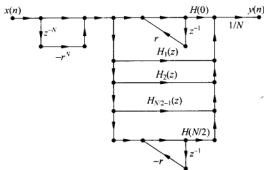


图 6.21 修正的 FIR 滤波器频率取样结构

当 N 为奇数时,式(6.48)可表示为

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right]$$

在一般情况下,频率取样结构比较复杂,所用的延时单元和乘法器比直接型结构要多。但对于窄带滤波器,大部分频率取样值 $H(k)$ 为零,从而使二阶网络个数大大减少,所以频率取样结构适用于窄带滤波器。

习 题

6.1 一个离散时间系统由下列差分方程表示:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$$

(1) 画出实现该系统的方框图。

(2) 画出实现该系统的信号流图。

6.2 一个离散时间系统由下列差分方程表示:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

画出该系统的直接型、正准型、级联型和并联型结构流图。

6.3 用直接型和正准型结构实现下列系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{-5 + 2z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}$$

$$(2) H(z) = 0.8 \frac{3z^3 + 2z^2 + 2z + 5}{z^3 + 4z^2 + 3z + 2}$$

6.4 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = 0.9^* R_5(n)$$

求出系统函数,并画出其直接型结构。

6.5 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为:

(1)

$$N = 6$$

$$h(0) = h(5) = 1.5$$

$$h(1) = h(4) = 2$$

$$h(2) = h(3) = 3$$

(2)

$$N = 7$$

$$h(0) = -h(6) = 3$$

$$h(1) = -h(5) = -2$$

$$h(2) = -h(4) = 1$$

$$h(3) = 0$$

试画出它们的线性相位型结构图,并分别说明它们的幅度特性、相位特性各有什么特点。

6.6 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$$

试用频率取样结构实现该滤波器。设取样点数 $N=5$,要求画出频率取样网络结构,写出滤波器参数的计算公式。

6.7 已知 FIR 滤波器的 16 个频率取样值为:

$$H(0) = 12, \quad H(3) \sim H(13) = 0$$

$$H(1) = -3 - j\sqrt{3}, \quad H(14) = 1 - j$$

$$H(2) = 1 + j, \quad H(15) = -3 + j\sqrt{3}$$

试画出其频率取样结构,选择 $r=1$,可以用复数乘法器。

6.8 用频率取样结构实现系统函数

$$H(z) = \frac{5 - 2z^{-1} - 3z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

取样点数 $N=6$,修正半径 $r=0.9$ 。

6.9 写出如图 6.22 所示网络的系统函数和差分方程。

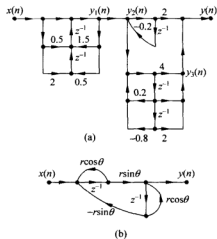


图 6.22 第 6.9 题图

无限脉冲响应数字滤波器的设计

7.1 引言

无限脉冲响应(IIR)数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (7.1)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (7.2)$$

理想的数字滤波器是非因果的,因而是物理上不可实现的,滤波器的设计就是用—个因果稳定的离散线性移不变系统的系统函数 $H(z)$ 去逼近理想滤波器的性能。

IIR 数字滤波器的设计方法分为两类:一类是借助于模拟滤波器的设计方法,另一类是直接在频域或者时域中进行设计,本章主要介绍这两类设计方法。

7.2 数字滤波器的技术指标与设计方法

7.2.1 数字滤波器的技术要求

数字滤波器的性能可以由传输函数描述,传输函数 $H(e^{j\omega})$ 表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中, $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性,表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况; $\varphi(\omega)$ 称为相频特性,反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。数字滤波器的设计一般只对幅频特性提出要求,对相频特性不作要求。但如果对输出波形有要求,则需要考虑相频特性的技术指标,如语音合成、波形传输及图像信号处理等。

理想滤波器是非因果的,物理上不可实现,为了物理上可实现,在通带与阻带之间还应设置一定宽度的过渡带,并且在通带和阻带中都允许有一定的误差容限,即通带不一定是完全水

平的,阻带不一定都绝对衰减到零。以低通滤波器为例,如图 7.1 所示, ω_p 和 ω_s 分别称为通带截止频率和阻带截止频率。通带频率范围为 $0 \leq \omega \leq \omega_p$,在通带中要求 $|1 - \delta_1| < |H(e^{j\omega})| \leq 1$,阻带频率范围为 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$,在阻带中要求 $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$,从 ω_p 到 ω_s 称为过渡带,一般是单调下降的。

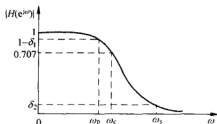


图 7.1 低通滤波器的技术要求

在实际应用中,通带内和阻带内允许的衰减一般用 dB(分贝)数表示,通带内允许的最大衰减用 α_p 表示;阻带内允许的最小衰减用 α_s 表示。 α_p 和 α_s 分别定义为

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} \text{ dB} \quad (7.3)$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} \text{ dB} \quad (7.4)$$

采用 $|H(e^{j0})|$ 进行归一化,式(7.3)和式(7.4)则表示为

$$\alpha_p = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \text{ dB} \quad (7.5)$$

$$\alpha_s = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| \text{ dB} \quad (7.6)$$

当幅度下降到 $\sqrt{2}/2$ 时,即 $|H(e^{j\omega})|$ 下降为 0.707,即 $\alpha_p = 3\text{dB}$,此时对应的频率 $\omega = \omega_c$ 称为 3dB 通带截止频率。

7.2.2 数字滤波器的设计方法

如前所述,理想滤波器是非因果的,物理上不可能实现。数字滤波器的设计问题就是寻找式(7.1)或式(7.2)中的一组系数 a_i 和 b_i ,使得其性能在某种意义上逼近所要求的特性。数字滤波器的设计大体包括以下三个步骤:

- (1) 给出所需要的滤波器的技术指标;
- (2) 设计一个 $H(z)$,使其逼近所要求的指标;
- (3) 用数字硬件或在计算机上编写算法实现所设计的 $H(z)$ 。

IIR 数字滤波器的设计方法一般分为下述两类。

(1) 先设计一个合适的模拟滤波器,然后变换成满足给定指标的数字滤波器。这种方法很方便,这是因为模拟滤波器的设计方法已经很成熟,它不仅有着完整的设计公式,还有完善的图表供查阅。这种方法的设计步骤如下:

- ① 将给定的数字滤波器的技术指标转换为模拟滤波器的技术指标;
- ② 根据转换后的技术指标设计模拟原型滤波器;
- ③ 再按照一定规则将模拟滤波器转换为数字滤波器。

(2) 直接在频域或者时域中进行设计,这是一种最优化设计方法。由于要解联立方程,因此需要计算机辅助进行设计。

FIR 滤波器的设计方法与 IIR 滤波器有很大的不同,FIR 滤波器的设计是通过对理想滤波器的频率特性作某种逼近得到的。常用的方法有窗函数法、频率取样法和计算机辅助

最优化设计法。FIR 滤波器的最大优点就是具有线性相位,而设计的 IIR 滤波器的相位都是非线性的。

7.3 用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器

7.3.1 模拟滤波器的设计

从模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器,必须先设计一个满足技术指标的模拟原型滤波器。模拟滤波器的理论和设计方法已经发展得相当成熟,常用的模拟滤波器包括巴特沃斯(Butterworth)滤波器、切比雪夫(Chebyshev)滤波器、椭圆(Ellipse)滤波器及贝塞尔(Bessel)滤波器等。这些经典的滤波器各有特点,巴特沃斯滤波器具有单调下降的幅频特性;切比雪夫滤波器的幅频特性在通带或者阻带内有波动,可以提高选择性;贝塞尔滤波器通带内有较好的线性相位特性;椭圆滤波器在通带和阻带内都有纹波,其选择性相对前三种是最好的,根据具体要求可以选用不同类型的滤波器。

模拟滤波器按幅度特性可分为低通、高通、带通和带阻滤波器四种类型,它们的理想幅频特性如图 7.2 所示。模拟低通滤波器有严格的设计方式,有现成的曲线和图表供设计人员使用。因此在设计模拟滤波器时,总是先设计低通滤波器,再通过频率变换将低通滤波器转换成希望类型的滤波器。

模拟低通滤波器幅度响应常采用幅度平方函数表示:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega} = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \quad (7.7)$$

给定模拟低通滤波器的设计指标 Ω_p 、 α_p 、 Ω_s 和 α_s , Ω_p 和 Ω_s 分别表示通带截止频率和阻带截止频率, α_p 和 α_s 分别是通带中的最大衰减和阻带中的最小衰减,如图 7.3 所示。模拟低通滤波器的设计就是寻找一个传输函数 $H_a(s)$,使其幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 满足给定的技术指标。滤波器的设计步骤分为下述两步:

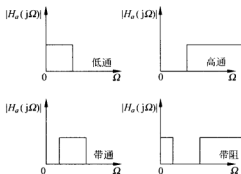


图 7.2 各种理想滤波器的幅频特性

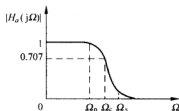


图 7.3 低通滤波器的幅频特性

- (1) 实现由给定的 Ω_p 、 α_p 、 Ω_s 和 α_s 求出 $|H_a(j\Omega)|^2$;
- (2) 由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 得到滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。

对于上面介绍的几种经典滤波器,其幅度平方函数都有自己的表达式,可以直接引用。

现在的问题是要由已知的 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求 $H_a(s)$ 。 $H_a(s)$ 的极点(或零点)与 $H_a(-s)$ 的极点(或零点)都具有象限对称性,因此 $H_a(s)$ 、 $H_a(-s)$ 的极点(或零点)也都具有象限对称性。任何实际可实现的滤波器都是稳定的,因此其系统函数 $H_a(s)$ 的极点一定落在 s 的左半平面,所以左半平面的极点一定属于 $H_a(s)$,而右半平面的极点必属于 $H_a(-s)$ 。根据这种对称性就可以由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。下面将介绍巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器的设计方法。

1. 巴特沃斯低通滤波器的设计方法

巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (7.8)$$

其中, N 为滤波器的阶数。当 $\Omega=0$ 时, $|H_a(j\Omega)|=1$; 当 $\Omega=\Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)|=1/\sqrt{2}$, Ω_c 称为 3dB 截止频率,如图 7.4 所示。

巴特沃斯低通滤波器的幅度特性随着 Ω 增加单调下降,下降的速度与阶数 N 有关。随着 N 增大,幅度下降的速度越快,过渡带越窄,在通带内更接近于 1,在阻带内迅速接近于零,因而幅度特性更接近于理想的矩形频率特性,如图 7.5 所示。不管 N 的取值是多少, $|H_a(j\Omega)|$ 都经过 $1/\sqrt{2}$ 点。

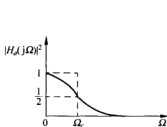


图 7.4 巴特沃斯滤波器幅度平方函数

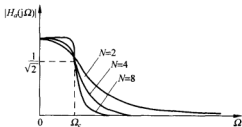


图 7.5 巴特沃斯滤波器幅频特性与 N 的关系

将 $j\Omega=s$ 代入式(7.8),可得

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}} \quad (7.9)$$

可以看出幅度平方函数有 $2N$ 个极点,

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{k}{2N})}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (7.10)$$

这 $2N$ 个极点等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上(该圆称为巴特沃斯圆),间隔是 π/N rad。这些极点以虚轴为对称轴,而且不会落在虚轴上。当 N 是奇数时,实轴上有两个极点;当 N 是偶数时,实轴没有极点。

为了保证所设计的滤波器是稳定的,在 $2N$ 个极点中,将 s 平面左半平面的 N 个极点分配给 $H_a(s)$,而将右半平面的 N 个极点分配给 $H_a(-s)$, $H_a(s)$ 的表达式为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \quad (7.11)$$

例如,当 $N=3$ 时,滤波器有 6 个极点,它们分别为

$$s_0 = \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}, \quad s_1 = -\Omega_c, \quad s_2 = \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}, \quad s_3 = \Omega_c e^{-j\frac{1}{3}\pi}, \quad s_4 = \Omega_c, \quad s_5 = \Omega_c e^{j\frac{1}{3}\pi}$$

取 s 平面左半平面的极点 s_0, s_1, s_2 组成 $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

在一般设计中,将所有的频率对 Ω_c 归一化,归一化频率 $\lambda = \Omega/\Omega_c$,那么归一化的巴特沃斯滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^{2N}}$$

归一化后的巴特沃斯滤波器的极点分布以及相应的系统函数、分母多项式的系数都有现成的表格可查。

模拟巴特沃斯低通滤波器的设计步骤如下所述。

(1) 由给定的设计指标 $\Omega_p, \alpha_p, \Omega_s$ 和 α_s 确定巴特沃斯滤波器的阶数 N 和频率 Ω_c 。

$$\text{当 } \Omega = \Omega_p \quad 1 + \lambda_p^{2N} = 10^{\alpha_p/10}$$

$$\text{当 } \Omega = \Omega_s \quad 1 + \lambda_s^{2N} = 10^{\alpha_s/10}$$

则

$$N = -\lg \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}} / \lg \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_p} \right) \quad (7.12)$$

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{\alpha_p/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (7.13)$$

或者

$$\Omega_c = \Omega_s (10^{\alpha_s/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (7.14)$$

(2) 求滤波器的极点,并由 s 平面左半平面的极点构成 $H_a(s)$ 。

幅度平方函数极点为

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

将 s 平面左半平面的 N 个极点分配给 $H_a(s)$, $H_a(s)$ 的表达式为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - S_k)} \quad (7.15)$$

例 7.1 设计模拟巴特沃斯低通滤波器,要求通带截止频率 $f_p = 5\text{kHz}$,通带最大衰减 $\alpha_p = 2\text{dB}$,阻带截止频率 $f_s = 12\text{kHz}$,阻带最小衰减 $\alpha_s = 30\text{dB}$ 。

解 (1) 计算 N 和 Ω_c ,由式(7.12),可得

$$\begin{aligned} N &= \lg \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}} / \lg \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_s} \right) \\ &= \lg \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}} / \lg \left(\frac{f_p}{f_s} \right) = 4.25 \end{aligned}$$

为了保证设计的滤波器留有一定余量,取大于等于 N 的最小整数,即取 $N=5$ 。

由式(7.13),可得

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{\alpha_p/10} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 2\pi \cdot 5.2755\text{krad/s}$$

(2) 确定 s 平面左半平面的极点

$$s_0 = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad s_1 = \Omega_c e^{j\frac{3}{2}\pi}, \quad s_2 = \Omega_c e^{j\pi}, \quad s_3 = \Omega_c e^{j\frac{1}{2}\pi}, \quad s_4 = \Omega_c e^{j\frac{7}{2}\pi}$$

(3) 求 $H_c(s)$, 即

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^5}{(s - \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2}})(s - \Omega_c e^{j\frac{3}{2}\pi})(s - \Omega_c e^{j\pi})(s - \Omega_c e^{j\frac{1}{2}\pi})(s - \Omega_c e^{j\frac{7}{2}\pi})}$$

2. 切比雪夫滤波器的设计方法

巴特沃斯滤波器的频率特性曲线, 无论在通带和阻带都是频率的单调函数。因此, 当通带边界处满足指标要求时, 通带内肯定会有余量。因此, 更有效的设计方法应该是将精确度均匀地分布在整個通带内, 或者均匀地分布在整個阻带内, 或者同时分布在两者之内, 从而就可以用阶数较低的系统满足要求。这可以通过选择具有等波纹特性的逼近函数来达到。

切比雪夫滤波器的幅频特性具有等波纹特性。它有两种形式:

① 在通带内是等波纹的, 在阻带内是单调的, 称为切比雪夫 I 型滤波器;

② 在通带内是单调的, 在阻带内是等波纹的, 称为切比雪夫 II 型滤波器。

下面先介绍切比雪夫多项式的定义和特点, 然后研究切比雪夫滤波器的设计方法。

切比雪夫多项式定义为

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N\operatorname{ch}^{-1}x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (7.16)$$

式中 N 为切比雪夫多项式的阶数。

当 $N=0$ 时, $C_0(x)=1$;

当 $N=1$ 时, $C_1(x)=x$;

当 $N=2$ 时, $C_2(x)=2x^2-1$;

当 $N=3$ 时, $C_3(x)=4x^3-3x$ 。

由此可归纳出切比雪夫多项式的递推公式为

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x) \quad (7.17)$$

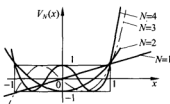


图 7.6 切比雪夫多项式曲线

不同 N 值的切比雪夫多项式的函数曲线如图 7.6 所示。从图 7.6 中可以看出, 切比雪夫多项式的零点在 $|x| \leq 1$ 区间内; 当 $|x| \leq 1$ 时, 曲线具有等纹波特性; 而当 $|x| > 1$ 时, 曲线按双曲余弦函数单调上升。

切比雪夫滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)} \quad (7.18)$$

其中 ϵ 是小于 1 的正数, 称为纹波参数, 是表示通带内纹波大小的一个参数, ϵ 愈大, 纹波也愈大。 Ω_p 称为有效通带截止频率。在切比雪夫滤波器中, 频率通常对 Ω_p 归一化, 即 $\lambda = \Omega/\Omega_p$ 。

图 7.7 所示的分别是 $N=3$ (N 为奇数) 和 $N=4$ (N 为偶数) 时的切比雪夫滤波器的幅频特性。从图 7.7 可以看出, 在通带内, 切比雪夫滤波器的幅度响应在 1 和 $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 之间

起伏变化,而在阻带内是单调下降的;当 N 为奇数时,滤波器在 $\Omega=0$ 处的幅度响应为 1;当 N 为偶数时,滤波器在 $\Omega=0$ 处的幅度响应为 $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 。当 $\Omega=\Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)| = 1/\sqrt{1+\epsilon^2}$, 即所有幅度函数曲线都通过 $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 点。

按照式(7.18),切比雪夫滤波器的幅度平方函数与 ϵ 、 Ω_p 和 N 有关。 ϵ 与通带内允许的纹波大小有关,设允许的通带纹波为 δ ,那么

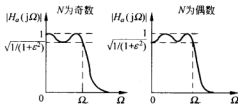


图 7.7 切比雪夫滤波器的幅频特性

$$\delta = 10 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}^2}{|H_a(j\Omega)|_{\min}^2} = 10 \lg(1 + \epsilon^2) \quad (7.19)$$

因此

$$\epsilon^2 = 10^{\frac{\delta}{10}} - 1 \quad (7.20)$$

给定通带内的纹波系数,就可以求得 ϵ 。

切比雪夫滤波器的阶数 N 是由阻带允许的衰减确定的。设在阻带截止频率 Ω_s 处的幅度平方函数值为 $|H_a(j\Omega_s)|^2$, 那么

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad (7.21)$$

由于 $\Omega_s/\Omega_p > 1$, 有

$$C_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right) = \operatorname{ch}\left[N \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)\right] = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2} - 1} \quad (7.22)$$

因此

$$N = \frac{\operatorname{ch}^{-1}\left[\sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2} - 1}\right]}{\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad (7.23)$$

切比雪夫滤波器的参数 ϵ 、 Ω_p 和 N 确定后,就可求出滤波器的极点,并确定 $H_a(s)$ 。可以证明切比雪夫滤波器幅度平方函数的极点为

$$s_i = \sigma_i + j\Omega_i \quad (7.24)$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_i = -\Omega_p \operatorname{sh} \xi \sin \frac{2i-1}{2N} \\ \Omega_i = \Omega_p \operatorname{ch} \xi \cos \frac{2i-1}{2N} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.25)$$

式中

$$\xi = \frac{1}{N} \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

由式(7.25)可得

$$\frac{\sigma_i^2}{\Omega_c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} + \frac{\Omega_i^2}{\Omega_c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} = 1 \quad (7.26)$$

这是一个椭圆方程。可以看出,切比雪夫滤波器的幅度平方函数的极点就是 $2N$ 个等角度间隔(间隔为 π/N)分布在 $\Omega_c \operatorname{ch} \xi$ 为长半轴, $\Omega_c \operatorname{sh} \xi$ 为短半轴的椭圆上的点。当 $N=3$ 时极点

分布如图 7.8 所示。求出幅度平方函数的极点后,将这些极点中位于 s 平面左半平面的 N 个极点分配给 $H_a(s)$,得到切比雪夫滤波器的传输函数

$$H_a(s) = \frac{A}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} \quad (7.27)$$

系数 A 由 $s=0$ 时滤波器幅度响应的值确定。当 N 为奇数时, $|H_a(0)| = 1$; 当 N 为偶数时, $|H_a(0)| = 1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 。

模拟切比雪夫低通滤波器的设计步骤如下所述。

(1) 由给定的设计指标确定切比雪夫滤波器的参数 ϵ 、 Ω_p 和 N , Ω_p 为有效通带截止频率,常常是预先给定的。

图 7.8 三阶切比雪夫滤波器的极点分布

由式(7.20)求 ϵ , 即

$$\epsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1$$

由式(7.23)求 N , 即

$$N = \frac{\text{ch}^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2} - 1} \right]}{\text{ch}^{-1} \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)}$$

(2) 求滤波器的极点,并由 s 平面左半平面的极点构成 $H_a(s)$ 。

滤波器的极点为

$$s_k = -\Omega_p \text{sh}\xi \sin \frac{2i-1}{2N} + j\Omega_p \text{ch}\xi \cos \frac{2i-1}{2N}$$

滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{A}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)}$$

系数 A 由 $|H_a(0)|$ 的值决定。

例 7.2 设计低通切比雪夫滤波器,要求通带截止频率 $f_p = 3\text{kHz}$,通带最大衰减 $\alpha_p = 0.1\text{dB}$,阻带截止频率 $f_s = 12\text{kHz}$,阻带最小衰减 $\alpha_s = 60\text{dB}$ 。

解 (1) 求阶数 N 和 ϵ 。

$$N = \frac{\text{ch}^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2} - 1} \right]}{\text{ch}^{-1} \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)} = 4.6, \quad \text{取 } N = 5$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1} = 0.1526$$

(2) 根据式(7.24)求出滤波器的极点,然后代入式(7.27)得到 $H_a(s)$, 即

$$H_a(s) = \frac{0.4095 \times \Omega_p^5}{(s + 0.5389\Omega_p)(s^2 + 0.3331\Omega_p s + 1.1949\Omega_p^2)(s^2 + 0.8720\Omega_p s + 0.6359\Omega_p^2)}$$

式中, $\Omega_p = 2\pi f_p = 2\pi \times 3 \times 10^3 = 1.884 \times 10^4 \text{ rad}$ 。

7.3.2 脉冲响应不变法

从模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器就是按照一定的转换关系将 s 平面上的 $H_a(s)$ 转换成 z 平面上的 $H(z)$ 。工程上常用的转换方法有脉冲响应不变法和双线性变换法, 本节将讨论脉冲响应不变法。

脉冲响应不变法是使数字滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 与相应的模拟滤波器的单位脉冲响应 $h_a(t)$ 的取样值完全一样, 即

$$h(n) = h_a(nT) \quad (7.28)$$

其中 T 为取样周期。

设 $H_a(s)$ 是 $h_a(t)$ 的拉普拉斯变换, $H(z)$ 为 $h(n)$ 的 Z 变换。将 $H_a(s)$ 表示为部分分式形式

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (7.29)$$

相应的单位脉冲响应为

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (7.30)$$

对 $h_a(t)$ 以 T 为周期进行取样, 那么

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n) \quad (7.31)$$

求 $h(n)$ 的 Z 变换, 得

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.32)$$

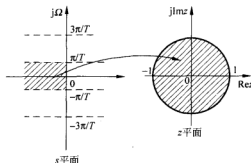
比较式(7.29)和式(7.32)可知, 将 $H_a(s)$ 变换到 $H(z)$ 只需用 $(1 - e^{s_k T} z^{-1})$ 代换 $H_a(s)$ 中的 $(s - s_k)$ 即可。

现在讨论脉冲响应不变法中从 s 平面到 z 平面的映射关系。由 2.4 节的取样序列的 Z 变换与模拟信号的拉普拉斯变换的关系, 可以得出 $h(n)$ 的 Z 变换与 $h_a(t)$ 的拉普拉斯变换之间的关系为

$$H(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (7.33)$$

式(7.33)表明, 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 是模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 在 s 平面上沿虚轴按周期 $2\pi/T$ 延拓, 然后经过映射 $z=e^{sT}$ 得到, 如图 7.9 所示。从图中可以看出, s 平面上每一条宽为 $2\pi/T$ 的横带重复地映射到整个 z 平面上, 而每一横条的左半部分映射到 z 平面的单位圆以内, 右半部分映射到 z 平面的单位圆以外, 而 s 平面的虚轴 ($j\Omega$) 映射到 z 平面的单位圆上, 虚轴上每一段长为 $2\pi/T$ 的线段都映射到 z 平面单位圆上的一周。

如果模拟滤波器的频带不是限于 $\pm\pi/T$ 之间, 则会在 $\pm\pi/T$ 的奇数倍附近产生频谱混

图 7.9 s 平面到 z 平面的映射

叠。只有当模拟滤波器的频率响应是带限的,从 s 平面映射到 z 平面才不会发生混叠,那么

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j \frac{\omega}{T}\right) \quad (7.34)$$

从前面的映射关系可知, s 平面上的极点 s_k 变换成 z 平面上的极点 $e^{s_k T}$ 。如果模拟滤波器 $H_a(s)$ 是稳定的,那么滤波器的极点 $s_k (s_k = \sigma_k + j\Omega_k)$ 位于 s 平面的左半平面,即 $\sigma_k < 0$,那么 $|e^{s_k T}| = |e^{\sigma_k}| < 1$,即由脉冲响应不变法设计的数字滤波器 $H(z)$ 的极点位于单位圆内,因而是稳定的。

从式(7.34)可以看出,数字滤波器的频率响应与取样间隔 T 成反比,如果取样频率很高,即 T 很小,滤波器的增益很大。人们往往不希望增益太高,为此,在高增益时,对式(7.32)修正为

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (7.35)$$

例 7.3 设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}$$

试利用脉冲响应不变法求数字滤波器的系统函数。

解 将 $H_a(s)$ 展开成部分分式得

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

用 $(1 - e^{s_k T} z^{-1})$ 代换 $(s - s_k)$ 得到

$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} + \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}}$$

取 $T=1$, 得到

$$H(z) = \frac{0.3181z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

数字滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.3181e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-2j\omega}}$$

在脉冲响应不变法中,由于映射 $z = e^T$ 不是简单的代数映射,从而使设计的数字滤波器

的频率响应产生失真。但是由于模拟滤频率和数字频率之间有线性关系,即 $\omega = T\Omega$,因此频率之间不存在失真。需要指出,脉冲响应不变法仅适合于带限滤波器,因此高通和带阻滤波器不能采用此种设计方法。

7.3.3 双线性变换法

在脉冲响应不变法中,由于从 s 平面到 z 平面的映射 $z = e^{sT}$ 不是简单的代数映射,从而使设计的数字滤波器的频率响应产生混叠失真。为了克服这一缺点,可以采用双线性变换法。

双线性变换法采用非线性频率压缩方法,将整个 s 平面压缩变换到 s_1 平面 $\pm \pi/T$ 之间的一条横带里,然后再用 $z = e^{s_1 T}$ 将此横带变换到整个 z 平面上去,这样就使 s 平面到 z 平面是一一映射的关系,从而消除了频谱混叠现象。

非线性频率压缩采用正切变换实现,即

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \Omega_1 T\right) \quad (7.36)$$

式(7.36)中 T 是取样间隔。当 Ω_1 从 $-\pi/T$ 经过 0 变化到 π/T 时, Ω 则由 $-\infty$ 经过 0 变化到 $+\infty$ 。将式(7.36)解析延拓到整个 s 平面和 s_1 平面,令 $j\Omega = s, j\Omega_1 = s_1$, 则得

$$s = \frac{2}{T} \operatorname{th}\left(\frac{1}{2} \Omega_1 T\right) = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \quad (7.37)$$

再通过 $z = e^{s_1 T}$ 转换到 z 平面上,可得

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (7.38)$$

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (7.39)$$

式(7.39)是 s 平面和 z 平面之间的单值映射关系,称为双线性变换,如图 7.10 所示。

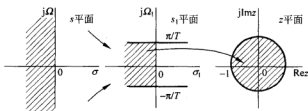


图 7.10 双线性变换法的映射关系

从图 7.10 可以看出, s 平面的 $j\Omega$ 轴映射为 z 平面的单位圆,左半平面映射到单位圆的内部,右半平面映射到单位圆的外部,这种一一映射消除了频谱混叠现象。如果模拟滤波器是稳定的,即 $H_a(s)$ 的所有极点都在 s 平面的左半平面内,那么经过双线性变换映射后的极点都在 z 平面的单位圆内,因此对应的数字滤波器也是稳定的。

将 $s = j\Omega$ 和 $z = e^{j\omega}$ 代入式 (7.38) 可得

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \quad (7.40)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega \quad (7.41)$$

上式表明, s 平面的 ω 与平面的 Ω 之间呈非线性关系。这种非线性关系导致双线性变换法的频率标度的非线性失真, 直接影响数字滤波器频率响应逼真地模仿模拟滤波器的频率响应。双线性变换的频率标度的非线性失真可以用图 7.11 所示的预畸变方法来补偿。设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为 ω_p 和 ω_T , 按式 (7.41) 进行频率变换求出对应的模拟滤波器的截止频率 Ω_p 和 Ω_T 。若模拟滤波器按这两个预畸变了频率 Ω_p 和 Ω_T 来设计, 那么双线性变换所得到的数字滤波器便具有所希望的截止频率特性。对于分段常数的滤波器, 双线性变换后, 仍得到幅频为分段常数的滤波器, 但是各个分段边缘的临界频率点产生了畸变, 可以通过预畸变的方法来补偿频率畸变。

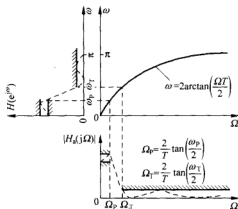


图 7.11 双线性变换频率非线性畸变的补偿方法

此外, 一个线性相位的模拟滤波器经双线性变换后就得到非线性相位的数字滤波器, 不再保持原有的线性相位了, 因此若希望得到具有严格线性相位的数字滤波器, 不能使用双线性变换设计方法。

例 7.4 已知模拟滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

采用双线性变换法将其转换为数字滤波器的系统函数, 设 $T=2$ 。

解 将式 (7.38) 代入 $H_a(s)$ 可得

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, T=2} = \frac{1}{2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + 3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + 1} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-1})^2 + 3(1-z^{-2}) + (1+z^{-1})^2} = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{6-2z^{-1}} \end{aligned}$$

7.3.4 设计 IIR 数字滤波器的频率变换法

前面讨论了低通 IIR 数字滤波器的设计方法,先设计原型模拟低通滤波器,然后采用脉冲响应不变法或双线性变换法转化为数字低通滤波器。实际中使用的数字滤波器,除低通型外还有高通、带通和带阻等类型,这些数字滤波器常用的设计方法有两种:一种是首先设计一个模拟原型低通滤波器,然后通过频率变换把它变换成所需要的模拟(高通、带通或带阻)滤波器,最后使用脉冲响应不变法或双线性变换法把它变换成所需要的数字(高通、带通或带阻)滤波器。另一种方法则是先设计一个模拟原型低通滤波器,然后采用脉冲响应不变法或双线性变换法将它转换成数字原型低通滤波器,最后通过频率变换把数字原型低通滤波器变换成所需要的数字(高通、带通或带阻)滤波器。本节只讨论第一种方法。

(1) 模拟低通到模拟高通的变换

设 $\bar{\Omega}_p$ 和 $\bar{\Omega}_s$ 分别为低通滤波器的通带截止频率和阻带截止频率。 λ 为低通滤波器归一化频率, $\lambda_p = \bar{\Omega}_p / \bar{\Omega}_p = 1$, $\lambda_s = \bar{\Omega}_s / \bar{\Omega}_p$, $p = j\lambda$, 归一化模拟低通滤波器为 $G(j\lambda)$ 。 Ω_p 和 Ω_s 分别为高通滤波器的通带截止频率和阻带截止频率, η 为高通滤波器归一化频率, $\eta_p = \Omega_p / \Omega_s = 1$, $\eta_s = \Omega_s / \Omega_p$, $q = j\eta$, 归一化模拟高通滤波器为 $H(j\eta)$ 。归一化模拟低通和高通滤波器的幅频特性如图 7.12 所示。

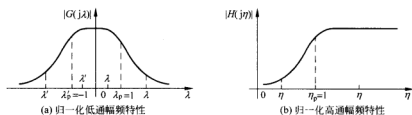


图 7.12 低通和高通的幅频特性

从图 7.12 可以看出低通的 λ 从 ∞ 经过 λ_s 和 λ_p 到 0 时,高通的 η 则从 0 经过 η_p 和 η_s 到 ∞ , 由 η 和 λ 的对应关系,得到模拟低通到模拟高通的频率变换关系

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \quad (7.42)$$

得到低通到高通的频率变换关系为

$$H(j\eta) = G(j\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{1}{\eta}} \quad (7.43)$$

又由于

$$q = j\eta = j \frac{\Omega}{\Omega_p} = \frac{s}{\Omega_p} \quad (7.44)$$

所以,模拟高通滤波器的转移函数为

$$H(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} \quad (7.45)$$

(2) 模拟低通到模拟带通的变换

设 Ω_{s1} 、 Ω_1 、 Ω_3 和 Ω_{sh} 分别为带通滤波器的下阻带上限频率、通带下限、通带上限和上阻

带下限频率。定义 $B = \Omega_3 - \Omega_1$ 为带通滤波器的带宽, 并以此作为参考频率对 Ω 轴作归一化处理, 即

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/B, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/B$$

$$\eta_l = \Omega_l/B, \quad \eta_h = \Omega_h/B$$

并且定义 $\Omega_2 = \sqrt{\Omega_1 \Omega_3}$ 为通带中心频率, 归一化频率 $\eta_c = \sqrt{\eta_l \eta_h}$ 。归一化模拟低通和带通滤波器的幅频特性如图 7.13 所示。

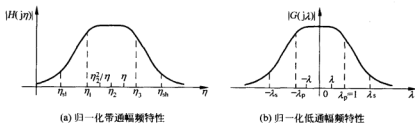


图 7.13 带通和低通的幅频特性

从图 7.13 可以看出 η 和 λ 的一些主要对应关系, 如表 7.1 所示。

表 7.1 η 和 λ 的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
η	0	η_{sl}	η_l	η_c	η_h	η_{sh}	∞

由 η 和 λ 的对应关系, 得到模拟低通到模拟带通的频率变换关系, 即

$$\lambda = \frac{\eta_c^2 - \eta^2}{\eta} \quad (7.46)$$

或

$$\rho = \frac{q^2 + \eta_c^2}{q}$$

令 $q = s/B$, 得

$$\rho = \frac{s^2 + \Omega_c^2}{sB} \quad (7.47)$$

所以模拟带通滤波器的转移函数为

$$H(s) = G(\rho) \Big|_{\rho = \frac{s^2 + \Omega_c^2}{sB}} \quad (7.48)$$

(3) 模拟低通到模拟带阻的变换

设 Ω_1 、 Ω_{sl} 、 Ω_{sh} 和 Ω_3 分别为带阻滤波器的通带下限、通带上限、阻带下限和阻带上限频率。定义 $B = \Omega_3 - \Omega_1$, 并以此作为参考频率对 Ω 轴作归一化处理, 即

$$\eta_l = \Omega_l/B, \quad \eta_h = \Omega_h/B$$

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/B, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/B$$

并且定义 $\Omega_2 = \sqrt{\Omega_1 \Omega_3}$ 为阻带中心频率, 归一化频率 $\eta_c = \sqrt{\eta_l \eta_h}$ 。模拟低通和带阻滤波器的幅频特性如图 7.14 所示。

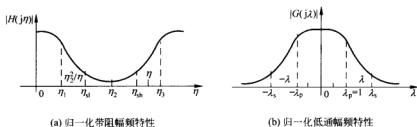


图 7.14 带阻和低通的幅频特性

从图 7.14 可以看出 η 和 λ 的一些主要对应关系,如表 7.2 所示。

表 7.2 η 和 λ 的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	0	λ_p	λ_s	∞
η	η_p	η_{hs}	η_i	$+\infty$	0	η_i	η_{hs}	η_p

由 η 和 λ 的对应关系,得到模拟低通到模拟带阻的频率变换关系,即

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_i^2} \quad (7.49)$$

去归一化得到

$$p = \frac{sB}{s^2 + \Omega_i^2} \quad (7.50)$$

所以模拟带阻滤波器的转移函数为

$$H(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{sB}{s^2 + \Omega_i^2}} \quad (7.51)$$

由模拟低通原型滤波器设计数字带通、高通和带阻滤波器的设计步骤如下所述。

- (1) 将所需类型数字滤波器的技术指标通过 $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$ 转换成模拟滤波器的技术指标。
- (2) 利用频率变换关系将模拟滤波器的技术指标转换为模拟低通滤波器的技术指标。
- (3) 设计模拟低通滤波器。
- (4) 将模拟低通滤波器通过频率变换法,转换成所需类型的模拟滤波器。
- (5) 采用双线性变换法,将所需类型的模拟滤波器转换成所需类型的数字滤波器。

例 7.5 设计一个数字高通滤波器,要求通带下限频率 $\omega_p = 0.8\pi$,阻带上限频率为 $\omega_s = 0.44\pi$,通带衰减不大于 3dB,阻带衰减不小于 15dB。

解 数字高通滤波器的技术指标为

$$\omega_p = 0.8\pi, \quad \alpha_p = 3\text{dB},$$

$$\omega_s = 0.44\pi, \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

模拟高通滤波器的技术指标,取 $T=1$

$$\Omega_p = 2 \tan \frac{1}{2} \omega_p = 6.155 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_s = 2 \tan \frac{1}{2} \omega_s = 1.655 \text{ rad/s}$$

对 ω_p 归一化,得

$$\eta_p = 1, \quad \eta_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 0.269$$

模拟低通滤波器的技术指标为

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{1}{\eta_p} = 3.71$$

设计归一化模拟低通滤波器

$$N = -\lg \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}} / \lg\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right) = 1.31, \quad \text{取 } N = 2$$

归一化模拟低通滤波器为

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

去归一化, 将 $p = s/\Omega_p$ 代入上式得

$$G(s) = \frac{\Omega_p^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_p s + \Omega_p^2}$$

将模拟低通转换成模拟高通, 即

$$H(s) = \frac{\Omega_p^2 s^2}{\Omega_p^2 s^2 + \sqrt{2}\Omega_p s + 1}$$

用双线性变换法将模拟低通转换成模拟高通, 即

$$H(z) = H_s(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.0653(1-z^{-1})^2}{1+1.199z^{-1}+0.349z^{-2}}$$

7.4 IIR 数字滤波器的优化设计

前面介绍的 IIR 数字滤波器设计方法是先设计模拟原型滤波器, 然后通过频域变换转换为数字滤波器。这种设计方法得到的幅度特性受到所选模拟滤波器特性的限制, 对于任意幅度特性的滤波器, 则不适合采用这种方法。设计任意幅度特性的滤波器通常是在某种最优化误差准则下, 通过求解线性或非线性方程组来确定滤波器的系数, 这种方法称为最优化设计方法。

7.4.1 频率最小均方误差设计

这种设计方法是施泰利兹(K. Steiglitz)于 1970 年根据频域均方误差最小准则提出的。所要设计的滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 在一组离散频率点 $\omega_i (i=1, 2, \dots, N)$ 上是已知的。设实际所求出的频率响应为 $H(e^{j\omega})$, 那么, 在给定频率点处所要求的频率响应与求出的实际频率响应的均方误差为

$$E = \sum_{i=1}^N [|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2 \quad (7.52)$$

频率最小均方误差设计方法就是寻找滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$, 使 E 最小。

为了使网络对系数变化的灵敏度低, 便于调整频率响应, 在最优化过程中计算导数方

便,滤波器采用级联结构,其系统函数 $H(z)$ 表示为

$$H(z) = A \prod_{i=1}^N \frac{1 + a_i z^{-1} + b_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} = AG(z) \quad (7.53)$$

其中, A 是常数; a_i, b_i, c_i, d_i 是待定系数。将 $z = e^{j\omega}$ 代入式(7.53)可得

$$H(e^{j\omega}) = A \prod_{i=1}^N \frac{1 + a_i e^{-j\omega} + b_i e^{-2j\omega}}{1 + c_i e^{-j\omega} + d_i e^{-2j\omega}} = AG(e^{j\omega}) \quad (7.54)$$

从式(7.52)可以看出, E 中共有 $(4N+1)$ 个待定系数。令 $\phi = [a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \dots, a_N, b_N, c_N, d_N]^T$, 那么 $E = (E, A_g)$ 。为了求出使误差 E 最小的待定系数,取 E 对每一个参数的偏导数,并令这些导数为零,得到 $4N+1$ 个方程

$$\frac{\partial E(\phi, A)}{\partial |A|} = 0 \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial E(\phi, A)}{\partial \phi_n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 4N \quad (7.56)$$

先求使 E 最小的最佳增益 A 值,将式(7.52)代入式(7.55)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\phi, A)}{\partial |A|} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^N [|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2}{\partial |A|} \\ &= \frac{\partial \sum_{i=1}^N [AG(e^{j\omega_i}, \phi) - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2}{\partial |A|} \\ &= \sum_{i=1}^N \{2[|A| |G(e^{j\omega_i}, \phi)| - |H_d(e^{j\omega_i})|] |G(e^{j\omega_i}, \phi)|\} = 0 \end{aligned}$$

由此可得

$$|A| = \frac{\sum_{i=1}^N |G(e^{j\omega_i}, \phi)| \cdot |H_d(e^{j\omega_i})|}{\sum_{i=1}^N |G(e^{j\omega_i}, \phi)|^2} \stackrel{\text{def}}{=} A_g \quad (7.57)$$

这里只考虑幅度误差,不考虑 A 的符号。将 A_g 作为常数代入式(7.56),误差函数则为 $E(\phi, A_g)$, 是 ϕ 的函数。现在求 $4N$ 个待定系数,由式(7.56)可得

$$\frac{\partial E(\phi, A_g)}{\partial \phi_n} = 2|A_g| \sum_{i=1}^N [|A_g| \cdot |G(e^{j\omega_i}, \phi)| - |H_d(e^{j\omega_i})|] \frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial \phi_n} \quad (7.58)$$

因为

$$|G(e^{j\omega_i}, \phi)| = [G(e^{j\omega_i}, \phi) G^*(e^{j\omega_i}, \phi)]^{\frac{1}{2}} \quad (7.59)$$

式中 $G^*(e^{j\omega_i}, \phi)$ 是 $G(e^{j\omega_i}, \phi)$ 的复共轭。

将式(7.59)两边对 ϕ_n 求偏导,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial \phi_n} &= \frac{1}{2} [G(e^{j\omega_i}, \phi) G^*(e^{j\omega_i}, \phi)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[G(e^{j\omega_i}, \phi) \frac{\partial G^*(e^{j\omega_i}, \phi)}{\partial \phi_n} + G^*(e^{j\omega_i}, \phi) \frac{\partial G(e^{j\omega_i}, \phi)}{\partial \phi_n} \right] \\ &= \frac{1}{|G(e^{j\omega_i}, \phi)|} \cdot \text{Re} \left[G^*(e^{j\omega_i}, \phi) \frac{\partial G(e^{j\omega_i}, \phi)}{\partial \phi_n} \right] \end{aligned}$$

将系统函数表示式(7.53)代入上式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial a_n} &= \frac{1}{|G(e^{j\omega_i}, \phi)|} \cdot \operatorname{Re} \left[G^*(e^{j\omega_i}, \phi) G(e^{j\omega_i}, \phi) \frac{z_i^{-1}}{1 + a_n z_i^{-1} + b_n z_i^{-2}} \right]_{z_i = e^{j\omega_i}} \\ &= |G(e^{j\omega_i}, \phi)| \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{z_i^{-1}}{1 + a_n z_i^{-1} + b_n z_i^{-2}} \right]_{z_i = e^{j\omega_i}}\end{aligned}\quad (7.60)$$

其中, $n=1, 2, \dots, N_s$ 。同理可得

$$\frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial b_n} = |G(e^{j\omega_i}, \phi)| \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{z_i^{-2}}{1 + a_n z_i^{-1} + b_n z_i^{-2}} \right]_{z_i = e^{j\omega_i}} \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial c_n} = -|G(e^{j\omega_i}, \phi)| \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{z_i^{-2}}{1 + c_n z_i^{-1} + d_n z_i^{-2}} \right]_{z_i = e^{j\omega_i}} \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial |G(e^{j\omega_i}, \phi)|}{\partial d_n} = -|G(e^{j\omega_i}, \phi)| \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{z_i^{-2}}{1 + c_n z_i^{-1} + d_n z_i^{-2}} \right]_{z_i = e^{j\omega_i}} \quad (7.63)$$

将式(7.60)~式(7.63)代入式(7.58), 得到 $4N$ 个线性方程, 这些方程可以利用弗莱切-泡伟尔(Fletcher-Powell)算法求解。

在设计过程中, 对系数函数零极点位置未给任何约束, 零极点可能在单位圆内, 也可能在单位圆外。如果极点在单位圆外, 那么滤波器不是因果稳定的, 因此需要对这些单位圆外的极点进行修正。

由于系统函数是一个有理函数, 零极点均以共轭成对的形式存在, 对于极点 z_1 , 有下面的关系:

$$\begin{aligned}|e^{j\omega} - z_1| |e^{j\omega} - z_1^*| &= |(e^{j\omega} - z_1) \cdot| |(e^{j\omega} - z_1^*) \cdot| \\ &= |e^{j\omega} - z_1^*| |e^{-j\omega} - z_1| \\ &= \left| z_1^* \left(\frac{1}{z_1^*} - e^{j\omega} \right) e^{-j\omega} \right| \left| z_1 \left(\frac{1}{z_1} - e^{j\omega} \right) e^{-j\omega} \right| \\ &= |z_1|^2 \left| e^{j\omega} - \frac{1}{z_1^*} \right| \left| e^{j\omega} - \frac{1}{z_1} \right|\end{aligned}$$

上式表明, 如果将极点 z_1 和它的共轭极点 z_1^* 均以其倒数 z_1^{-1} 和 $(z_1^*)^{-1}$ 代替后, 幅度特性的形状不变化, 仅是幅度的增益变化了 $|z_1|^2$ 。设极点 z_1 处于单位圆外, 如果用其倒数进行代换, 变成 z_1^{-1} , 将极点移到单位圆内。极点位置重新分配后, 滤波器就变成因果稳定的。

例 7.6 设计低通数字滤波器, 其幅度特性如图 7.15(a) 所示。截止频率 $\omega_c = 0.1\pi \text{ rad}$ 。

解 考虑到通带和过渡带的重要, 在 $0 \sim 0.2\pi$ 区间, 每隔 0.01π 取一点 ω_i 值, 在 $0.2\pi \sim \pi$ 区间, 每隔 0.1π 取一点 ω_i 值, 并增加一点过渡带, 在 $\omega = 0.1\pi$ 处 $|H_d(e^{j\omega})| = 0.5$, 即

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1.0 & \omega = 0, 0.01\pi, 0.02\pi, \dots, 0.09\pi \\ 0.5 & \omega = 0.1\pi \\ 0.0 & \omega = 0.11\pi, 0.12\pi, \dots, 0.19\pi \\ 0.0 & \omega = 0.2\pi, 0.3\pi, \dots, \pi \end{cases}$$

取样点数 $N=29$, 取 $K=1$, 即只用一个二阶滤波器, 系统函数为

$$H(z) = A \frac{1 + a_1 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + d_1 z^{-2}}$$

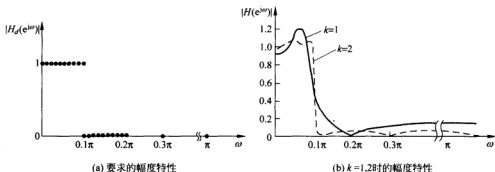


图 7.15 例 7.6 图

根据式(7.52)、式(7.55)和式(7.56)求出 A, a_1, b_1, c_1, d_1 , 代入上式后, 得到的数字滤波器幅度特性如图 7.15(b)中实线所示。按照上面相同的步骤, 可得 $K=2$ 时的幅度特性如图 7.15(b)虚线所示。从图中可以看出 $K=2$ 比 $K=1$ 幅度特性明显改善, 但计算量增大了。

这种设计方法计算比较繁琐, 一般用计算机进行求解, 但可以得到任意给定幅度特性, 而且性能比较好。

7.4.2 IIR 数字滤波器的时域直接设计

设希望设计的 IIR 数字滤波器的单位脉冲响应为 $h_d(n)$, 时域设计法是设计一个 IIR 数字滤波器, 使它的单位脉冲响应 $h(n)$ 逼近 $h_d(n)$ 。

设滤波器是因果性的, 其系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (7.64)$$

式中 $a_0 = 1$ 。时域直接设计法是寻找 $M+N+1$ 个系数 a_i, b_i , 以便在 $0 \leq k \leq p-1$ 的范围内, 使 $h(n)$ 逼近 $h_d(n)$ 。

式(7.64)可以写成

$$\sum_{k=0}^{p-1} h(k) z^{-k} \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

代入 $p = M+N+1$, 则有

$$\sum_{k=0}^{M+N} h(k) z^{-k} \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

令等式两边 z 的同次幂的系数相等, 即可得 $M+N+1$ 个方程:

$$\begin{aligned} h(0) &= b_0 \\ h(0)a_1 + h(1) &= b_1 \\ h(0)a_2 + h(1)a_1 + h(2) &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

由于 $i > M$ 时, $b_i = 0$, 因而一般表达式可分为两种表示, 即

$$\sum_{i=0}^k a_i h(k-i) = b_k, \quad 0 \leq k \leq M \quad (7.65)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i h(k-i) = 0, \quad M < k \leq M+N \quad (7.66)$$

用 $h_d(k)$ 代替 $h(k)$ ($k=0, 1, \dots, M+N$), 求解式 (7.65) 和式 (7.66), 得到 N 个 a_i 和 $M+1$ 个 b_i , 从而得到系统函数 $H(z)$ 。

可以看出, 这里只取 $H(z)$ 对应的单位脉冲响应 $h(n)$ 前 $M+N+1$ 项等于所要求的单位脉冲响应 $h_d(n)$, 而 $M+N+1$ 以后的项都不予考虑。当滤波器频率特性阻带衰减要求过高时, 这一方法就难以达到要求, 但可用此法得到的系数作为其他更好的最优算法的初始估计值。

实际应用中, 有时要求给出一定的输入信号波形, 滤波器的输出为希望的波形, 这种滤波器称为波形形成滤波器, 它也属于以上讨论的时域的直接设计法。

设 $x(n)$ 为给定的输入信号, $y_d(n)$ 为希望的输出信号, $x(n)$ 和 $y_d(n)$ 长度分别为 M 和 N , 实际的滤波器输出为 $y(n)$, 按照 $y(n)$ 和 $y_d(n)$ 的最小均方误差准则求滤波器的单位取样响应, 即

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - y_d(n)]^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) - y_d(n) \right]^2 = \min \end{aligned} \quad (7.67)$$

令 $\frac{\partial E}{\partial h(i)} = 0, i=0, 1, \dots, N$, 求得 N 个最佳 $h(n)$ 。

由式 (7.67) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} 2 \left[\sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) - y_d(n) \right] x(n-i) &= 0 \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m)x(n-i) &= \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-i) \end{aligned} \quad (7.68)$$

利用式 (7.68) 得到 N 个 $h(n)$ 后, 利用式 (7.65) 和式 (7.66) 求出 $H(z)$ 的 N 个 a_i 系数和 $M+1$ 个 b_i 系数。

例 7.7 设计数字滤波器, 要求在给定输入 $x(n) = \{3, 1\}$ 的情况下, 输出 $y_d(n) = \{1, 0.25, 0.1, 0.01, 0\}$ 。

解 设 $h(n)$ 的长度为 4, 按照式 (7.68), 得

$$\begin{cases} 10h(0) + 3h(1) = 3.25 \\ 3h(0) + 10h(1) + 3h(2) = 0.85 \\ 3h(1) + 10h(2) + 3h(3) = 0.31 \\ 2h(2) + 9h(3) = 0.03 \end{cases}$$

解联立方程, 得

$$h(n) = \{0.3330, -0.0278, 0.0426, -0.0109\}$$

将 $h(n)$ 以及 $M=1, N=2$ 代入式 (7.65) 和式 (7.66), 得

$$a_1 = 0.1824, \quad a_2 = -0.1126$$

$$b_1 = 0.0330, \quad b_0 = 0.3333$$

滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.3333 + 0.0330z^{-1}}{1 + 0.1824z^{-1} - 0.1126z^{-2}}$$

相应的差分方程为

$$y(n) = 0.3333x(n) + 0.0330x(n-1) - 0.1824y(n-1) + 0.1126y(n-2)$$

当 $x(n) = \{3, 1\}$ 时, 输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = \{0.9999, 0.2499, 0.1, 0.0099, 0.0095, 0.0006, 0.0012, \dots\}$$

将 $y(n)$ 与给定的 $y_d(n)$ 比较可以看出, $y(n)$ 的前五项与 $y_d(n)$ 的前五项很相近, $y(n)$ 在五项以后幅度值很小。

7.5 IIR 数字滤波器的 Matlab 仿真实现

前面讨论了 IIR 滤波器的设计方法, 在 Matlab 中, IIR 数字滤波器的设计可以调用信号处理工具箱的函数来实现。

7.5.1 IIR 数字滤波器设计

设数字滤波器系统函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n+1)z^{-n}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(n+1)z^{-n}}$$

模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n+1)}{s^n + a(2)s^{n-1} + \dots + a(n+1)}$$

函数 `butter` 和 `cheby1` 可以确定 Butterworth(巴特沃斯)和 Chebyshev(切比雪夫) I 型滤波器的系统函数。

函数 `butter` 的调用格式为

```
>>[b,a] = butter(n,Wc,)           % 设计数字 Butterworth 滤波器
>>[b,a] = butter(n,Wc,'ftype')   % 设计模拟 Butterworth 滤波器
```

其中, n 为滤波器阶数, Wc 为截止频率。

函数 `cheby1` 的调用格式为

```
>>[b,a] = cheby1(n,Rp,Wc)         % 设计数字 Chebyshev 滤波器
>>[b,a] = cheby1(n,Rp,Wc,'ftype') % 设计模拟 Chebyshev 滤波器
```

其中, n 为滤波器阶数, Rp 为通带内的纹波系数, Wc 为截止频率。

例 7.8 设计一模拟 butterworth 低通滤波器, 通带截止频率为 300Hz, 通带最大衰减为 2dB, 阻带截止频率为 800Hz, 阻带最小衰减为 30dB。

解 滤波器的阶数和截止频率可由式(7.12)和式(7.13)确定, 程序段为

```

>> Wp = 2 * pi * 300;
Ws = 2 * pi * 800;
Rp = 2;
Rs = 30;
N = ceil((log10((10^(0.1 * Rs) - 1)/(10^(0.1 * Rp) - 1)))/(2 * log10(Ws/Wp)));
Wc = Wp/((10^(Rp/10) - 1)^(1/(2 * N)));
[b,a] = butter(N,Wc,'s');
freqs(b,a)

```

运行程序,得到 $N=4$, $W_c=2.0157e+003$ 。幅频特性和相频特性如图 7.16 所示。

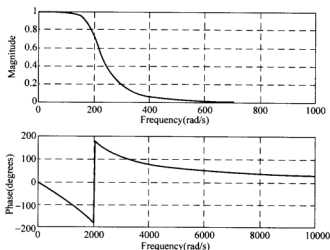


图 7.16 例 7.8 的滤波器幅频特性和相频特性

思考练习

设计一数字 butterworth 低通滤波器,通带截止频率为 1kHz,通常最大衰减为 1.5dB,阻带截止频率为 4kHz,阻带最小衰减为 30dB,取样频率为 15kHz。画出滤波器的幅频特性和相频特性。

7.5.2 模拟滤波器到数字滤波器的转换

设模拟滤波器和数字滤波器的系统函数分别表示为

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^N + b(2)s^{N-1} + \cdots + b(N+1)}{a(1)s^N + a(2)s^{N-1} + \cdots + a(N+1)}$$

$$H(z) = \frac{bz(1)s^N + bz(2)s^{N-1} + \cdots + bz(N+1)}{az(1)s^N + az(2)s^{N-1} + \cdots + az(N+1)}$$

从模拟滤波器到数字滤波器的转换有两种方法,即脉冲响应不变法和双线性变换法。

脉冲响应不变法用 $(1 - e^{sT} z^{-1})$ 代换 $H_a(s)$ 中的 $(s - s_k)$ 即可得到 $H(z)$,从而将模拟滤波器转换为数字滤波器格式。脉冲响应不变法可用函数 `impinvar` 实现,其调用格式为

```
>>>[bz,az]=impinvar(b,a,fs)
```

其中, f_s 为取样频率。

双线性变换法用 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代换 $H_a(s)$ 中的 s 即可得到 $H(z)$, 从而将模拟滤波器转换为数字滤波器格式。双线性变换法可用函数 `bilinear` 实现, 其调用格式为

```
>>>[zd,pd,kd]=bilinear(z,p,k,fs)
```

其中, z, p, k 和 zd, pd, kd 分别为 s 域和 z 域系统函数的零点、极点和增益。

例 7.9 利用 `impinvar` 将一模拟低通滤波器转换成数字滤波器(取样频率为 10Hz), 程序段为

```
>>>[b,a]=butter(4,.3,'s');
[bz,az]=impinvar(b,a,10);
```

程序运行结果为

```
bz=1.0e-006 *
    -0.0000    0.1324    0.5192    0.1273    0
az=1.0000   -3.9216    5.7679   -3.7709    0.9246
```

思考练习

利用 `bilinear` 重做例 7.9, 并将两种方法的实现结果进行比较。

习 题

7.1 设计一个模拟巴特沃斯低通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 6\text{kHz}$, 通带最大衰减 $\alpha_p = 3\text{dB}$, 阻带截止频率 $f_s = 12\text{kHz}$, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 25\text{dB}$ 。

7.2 设计一个模拟切比雪夫低通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 3\text{kHz}$, 通带最大衰减 $\alpha_p = 0.2\text{dB}$, 阻带截止频率 $f_s = 12\text{kHz}$, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 50\text{dB}$ 。

7.3 设计一个模拟巴特沃斯高通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 20\text{kHz}$, 通带最大衰减 $\alpha_p = 3\text{dB}$, 阻带截止频率 $f_s = 10\text{kHz}$, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 15\text{dB}$ 。

7.4 已知模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 为

$$(1) H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$(2) H_a(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

式中, a, b 为常数, 设 $H_a(s)$ 因果稳定, 试采用脉冲响应不变法, 分别将其转换成数字滤波器 $H(z)$ 。

7.5 已知模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 为

$$(1) H_a(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$(2) H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

试采用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转换成数字滤波器, 设 $T=2s$ 。

7.6 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃斯数字带通滤波器, 取样频率 $f_s=500\text{Hz}$, 上、下边带截止频率分别为 $f_2=150\text{Hz}$, $f_1=30\text{Hz}$ 。

7.7 用双线性变换法设计一个三阶切比雪夫数字高通滤波器, 取样频率 $f_s=8\text{kHz}$, 截止频率分别为 $f_c=2\text{kHz}$ (不计 4kHz 以上的频率分量)。

7.8 设计一个数字高通滤波器, 要求通带截止频率 $\omega_p=0.8\pi\text{rad}$, 通带衰减不大于 3dB , 阻带截止频率 $\omega_s=0.5\pi\text{rad}$, 阻带衰减不小于 18dB , 希望采用巴特沃斯型滤波器。

7.9 设计一个数字带通滤波器, 通带范围为 $0.25\pi\text{rad}$ 到 $0.45\pi\text{rad}$, 通带内最大衰减为 3dB , $0.15\pi\text{rad}$ 以下和 $0.55\pi\text{rad}$ 以上为阻带, 阻带内最小衰减为 15dB , 试采用巴特沃斯型模拟低通滤波器。

7.10 要求对输入模拟信号取样并进行低通数字滤波, 系统取样频率 $f_s=15\text{kHz}$; 要求保留 4.5kHz 以下的频率成分, 幅度失真小于 0.1dB ; 要求滤除 5.5kHz 以上的频率成分, 衰减大于 40dB 。试设计数字滤波器。

有限脉冲响应数字滤波器的设计

8.1 引言

有限脉冲响应(FIR)数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (8.1)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (8.2)$$

FIR 滤波器的设计方法和 IIR 滤波器的设计方法有很大的不同, IIR 数字滤波器的设计方法是利用模拟滤波器成熟的理论和设计方法进行设计的, 模拟滤波器的设计有大量图表可查, 方法简单, 并且保留了一些典型模拟滤波器优良的幅频特性。由于设计过程中只考虑了幅频特性, 没有考虑相位特性, 所设计的滤波器相位特性一般是非线性的。为了得到线性相位特性, 则要采用全通网络进行相位校正。而 FIR 数字滤波器很容易得到严格的线性相位。此外, FIR 数字滤波器的单位脉冲响应是有限长的, 因此总是稳定的。

FIR 数字滤波器的设计是建立在对理想滤波器频率特性作某种近似的基础上得到的。FIR 滤波器的设计方法主要有窗函数法、频率取样法和等纹波逼近法等。

8.2 利用窗函数法设计 FIR 滤波器

利用窗函数法设计 FIR 滤波器的设计思想是寻找一个 FIR 滤波器, 使其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 逼近理想 FIR 滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 。设 $h_d(n)$ 是 $H_d(e^{j\omega})$ 对应的单位脉冲响应, 因此

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (8.3)$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (8.4)$$

一般来说, $H_d(e^{j\omega})$ 是逐段恒定的, 且在边界频率处有不连续点, 因此 $h_d(n)$ 是无限长的, 且是非因果序列。这里讨论的是 FIR 滤波器, 其 $h(n)$ 是有限长的, 最有效的方法是对

$h_d(n)$ 进行截取,即

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (8.5)$$

式中 $w(n)$ 是一个有限长的窗口函数序列。

设理想低通滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (8.6)$$

相应的单位取样响应 $h_d(n)$ 为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} \cdot e^{j\omega\alpha} d\omega = \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\pi} \quad (8.7)$$

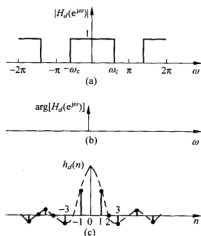


图 8.1 理想低通滤波器的频率响应和
单位取样响应

如图 8.1 所示。从图 8.1 中可以看出, $h_d(n)$ 是中心位于 α 的偶对称无限长非因果序列。为了构造一个长度为 N 的因果 FIR 滤波器, 将 $h_d(n)$ 截取一段, 使得

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8.8)$$

为了保证设计的滤波器具有线性相位, $h(n)$ 必须满足对称性要求, 因此,

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (8.9)$$

式(8.8)可以将 $h(n)$ 看作是 $h_d(n)$ 与矩形窗 $w_R(n)$ 相乘的结果, 即

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) \quad (8.10)$$

其中

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8.11)$$

下面从频域上分析对 $h_d(n)$ 加窗的影响。式(8.10)是相乘关系, 按照复卷积定理, 在频域上是周期卷积, 即

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned} \quad (8.12)$$

其中 $H(e^{j\omega})$ 、 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 分别是 $h(n)$ 、 $h_d(n)$ 和 $w_R(n)$ 的傅里叶变换, 将

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (8.13)$$

表示成幅度函数和相位函数, 即

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\omega\alpha} \quad (8.14)$$

其中

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$

$W_R(\omega)$ 的图形如图 8.2 所示,它在 $\pm 2\pi/N$ 之内为一个主瓣,两侧形成许多衰减振荡的旁瓣。

理想低通滤波器的频率响应式(8.6)可表示为

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\tau} \quad (8.15)$$

其幅度响应 $H_d(\omega)$ 为

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (8.16)$$

由式(8.12)可得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= e^{-j\omega\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

因此 FIR 滤波器的幅度响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \quad (8.18)$$

式(8.18)表明,滤波器的幅度响应等于理想低通滤波器的幅度响应 $H_d(\omega)$ 与矩形窗幅度响应 $W_R(\omega)$ 的周期卷积,如图 8.3 所示。当 $\omega=0$ 时, $H(0)$ 等于图 8.3(a) 与图 8.3(b) 两波形乘积的积分,相当于对 $W_R(\theta)$ 在 $\pm\omega_c$ 之间一段波形的积分,当 $\omega_c \gg 2\pi/N$ 时,近似 $\pm\pi$ 之间波形的积分。当 $\omega=\omega_c$ 时,情况如图 8.3(c) 所示,当 $\omega \gg 2\pi/N$ 时,积分近似为 $W_R(\theta)$ 一半波形的积分,对 $H(0)$ 归一化后的值为 $1/2$ 。当 $\omega=\omega_c+2\pi/N$ 时,情况如图 8.3(e) 所示, $W_R(\theta)$ 主瓣完全移到积分区间外边,因为最大的一个负峰完全在区间 $[-\omega_c, \omega_c]$ 中,因此, $H(\theta)$ 在该点形成最大的负峰。相应地,当 $\omega=\omega_c-2\pi/N$ 时,情况如图 8.3(d) 所示, $W_R(\theta)$ 主瓣完全在区间 $\pm\omega_c$ 之间,而最大的一个负峰移到区间 $[-\omega_c, \omega_c]$ 外,因此, $H(\theta)$ 在该点形成最大的正峰。图 8.3 表明, $H(\theta)$ 最大的正峰与最大的负峰对应的频率相距 $4\pi/N$ 。

通过以上分析可知,对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后, $H(\theta)$ 与原理想低通 $H_d(\theta)$ 的差别有以下两点:

(1) 在理想特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度近似地等于 $W_R(\theta)$ 主瓣宽度, $\Delta\omega=4\pi/N$ 。

(2) 通带内增加了波动,最大的峰值在 $\omega_c-2\pi/N$ 处。阻带内产生了余振,最大的负峰在 $\omega_c+2\pi/N$ 处。通带与阻带中波动的情况与窗函数的幅度谱有关。 $W_R(\theta)$ 波动越快 (N 加大时),通带与阻带内波动越快, $W_R(\theta)$ 旁瓣的大小直接影响波动的大小。

这些影响是对 $h_d(n)$ 加矩形窗引起的,称之为吉布斯效应。这种效应直接影响滤波器的性能。通带内的波动影响滤波器通带中的平稳性,阻带内的波动影响阻带内的衰减,可能使最小衰减不能满足技术要求。另外,一般滤波器都要求过渡带愈窄愈好。下面研究如何减少吉布斯效应的影响,从而设计一个满足要求的 FIR 滤波器。

直观上,增加矩形窗口的宽度,即加大 N ,可以减少吉布斯效应的影响。只要分析一下 N 加大时 $W_R(\theta)$ 的变化,就可以看出这一结论是否完全正确。在主瓣附近,按照式(7.34),

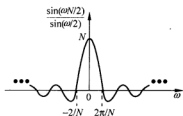


图 8.2 矩形窗的频谱曲线

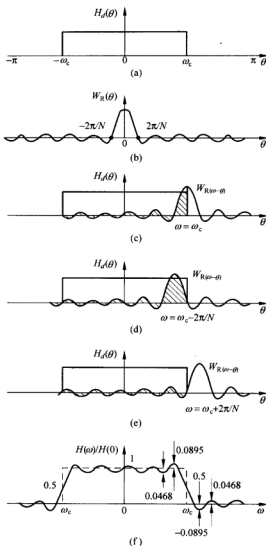


图 8.3 理想低通与矩形窗频谱函数卷积过程

$W_R(\omega)$ 可近似为

$$W_R(\omega) \approx \frac{\sin(\omega N/2)}{\omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质是随 x 加大 (N 加大), 主瓣幅度加高, 同时旁瓣也加高, 保持主瓣和旁瓣幅度相对值不变; 另一方面, 波动的频率加快, 当 $x \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) 时, $\sin x/x$ 趋近于 δ 函数, 因此, 当 N 加大时, $H(\omega)$ 的波动幅度没有多大改善, 带内最大肩峰比 $H(0)$ 高 8.95%, 阻带最大负峰比零值超过 8.95%, 使阻带最小衰减只有 21dB。 N 加大带来的最大好处就是 $H(\omega)$ 过滤波变窄 (过滤带近似为 $4\pi/N$)。因此加大 N 并不是减少吉布斯效应的有效方法。

以上分析说明,调整窗口长度 N 可以有效地控制过渡带的宽度,而减少带内波动以及加大阻带的衰减只能从窗函数的形状上找解决方法。如果能找到窗函数形状,使其谱函数的主瓣包含更多的能量,相应旁瓣幅度就变小了;旁瓣的减少可使通带与阻带内的波动减少,从而加大阻带的衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。下面介绍几种常用的窗函数。

1. 矩形窗

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8.19)$$

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (8.20)$$

2. 三角(bartlett)窗

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases} \quad (8.21)$$

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^2, \quad M = \frac{N-1}{2} \quad (8.22)$$

3. 汉宁(Hanning)窗

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (8.23)$$

或

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] w_R(n) \quad (8.24)$$

$$W(e^{j\omega}) = W(\omega) e^{-j\omega n}$$

利用序列的傅里叶变换的调制性质,由式(8.24)可得出汉宁窗的频谱幅度函数为

$$W(\omega) = 0.5 W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \quad (8.25)$$

其中 $W_R(\omega)$ 是矩形窗的频谱幅度函数。当 $N \geq 1$ 时,上式可近似为

$$W(\omega) = 0.5 W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] \quad (8.26)$$

因此可以认为汉宁窗的频谱由图 8.4 所示的三部分组成,三部分频谱相加的结果使旁瓣大大抵消,而使能量有效地集中在主瓣内,代价是使主瓣的宽度加大了一倍。

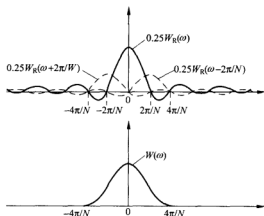


图 8.4 汉宁窗的频谱

4. 汉明(Hamming)窗

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] w_R(n) \quad (8.27)$$

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23W_R\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] \quad (8.28)$$

5. 布莱克曼(Blackman)窗

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] w_R(n) \quad (8.29)$$

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] + 0.04\left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)\right] \quad (8.30)$$

图 8.5 给出了以上 5 种窗函数的波形, 图 8.6 给出了 $N=51$ 时 5 种窗函数的幅度谱。从图中可以看出, 用矩形窗设计的滤波器的过渡带最窄, 但阻带衰减指标最差, 仅有一 21dB 左右。而用布莱克曼窗设计的阻带衰减指标最好, 可达 -74dB, 但过渡带最宽, 约为矩形窗的 3 倍。

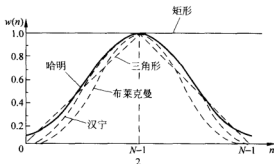


图 8.5 常用的窗函数

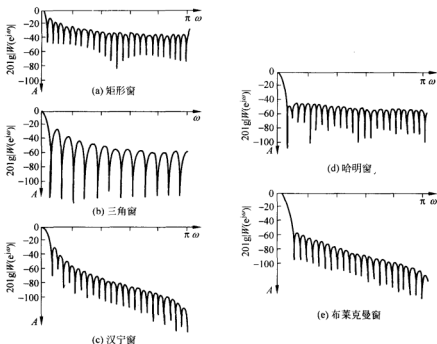


图 8.6 常用窗函数的频谱

6. 凯泽(Kaiser)窗

$$w(n) = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0(\beta)} \quad (8.31)$$

其中, $I_0(x)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数, 可用以下的级数计算

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (8.32)$$

在实际应用中, 级数取 15~25 项就可以达到足够的精度。

凯泽窗是一族窗函数。 β 是可调参数, 调节 β 值可以改变主瓣的宽度和旁瓣的幅度, β 的典型值在 $4 < \beta < 9$ 范围内。凯泽窗的曲线如图 8.7 所示。当 $n = (N-1)/2$ 时, $w(n) = I_0(\beta)/I_0(\beta) = 1$, 当 n 从中点向两边变化时, $w(n)$ 逐渐减小, β 愈大, $w(n)$ 变化愈快。当 $n=0$ 和 $n=N-1$ 时, $w(0) = w(N-1) = 1/I_0(\beta)$ 。在图 8.7 中, $\beta=5.44$ 的曲线与布莱克曼窗相近, 而 $\beta=0$ 的曲线就是矩形窗。参数 β 选得愈大, $w(n)$ 的频谱的旁瓣愈小, 但主瓣宽度也相应增加。

下面介绍用窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤:

- (1) 给出希望设计的滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 。
- (2) 根据允许的过渡带宽及阻带衰减, 初步选定窗函数和 N 值。

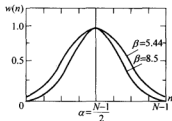


图 8.7 凯泽窗函数

(3) 计算 $h_d(n)$ 。

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (8.33)$$

或者

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (8.34)$$

如果 $H_d(e^{j\omega})$ 不能用简单函数表示, 计算式 (8.33) 积分非常困难, 可以用求和代替积分。对 $H_d(e^{j\omega})$ 在 ω 从 0 到 2π 之间取样 M 个点, 取样值为 $H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$, $k=0, 1, \dots, M-1$, 并用 $2\pi/M$ 代替式 (8.33) 中的 $d\omega$, 因此式 (8.33) 可以近似写成

$$\tilde{h}_d(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k}) e^{jn\frac{2\pi}{M}k} \quad (8.35)$$

由频率取样定理可知, $\tilde{h}_d(n)$ 与 $h_d(n)$ 满足如下关系:

$$\tilde{h}_d(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n - rM) \quad (8.36)$$

当 $M \gg N$ 时, $\tilde{h}_d(n)$ 在窗口范围内能很好地逼近 $h_d(n)$ 。式 (8.35) 可以用 $H_d(e^{j\omega})$ 的 M 个取样点, 进行 IDFT 得到。

(4) 将 $h_d(n)$ 与窗函数相乘得 FIR 数字滤波器的冲激响应 $h(n)$ 。

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad (8.37)$$

(5) 计算 FIR 数字滤波器的频率响应, 并验证是否达到所要求的指标。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \quad (8.38)$$

或者

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega} \quad (8.39)$$

例 8.1 用窗函数法设计线性相位 FIR 低通滤波器, 设 $N=11$, $\omega_c=0.2\pi \text{ rad}$ 。

解 理想数字低通滤波器可表示为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0 & 0.2\pi < |\omega| < \pi \end{cases}$$

对应的单位取样响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\pi}, \quad 0 \leq n \leq 10$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(N-1) = 5$$

$$h_d(n) = \frac{\sin[0.5\pi(n-5)]}{(n-5)\pi}, \quad 0 \leq n \leq 10$$

由此得到要求设计的 FIR 数字滤波器的单位取样响应为

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.5\pi(n-5)]}{(n-5)\pi} \cdot w(n)$$

图 8.8 表示采用矩形窗、汉宁窗和布莱克曼窗设计的 FIR 滤波器的幅度特性, 可以清楚看出, 用矩形窗时过渡带最窄, 而阻带衰减最小, 布莱克曼窗过渡带最宽, 但阻带衰减

大。为保证有同样的过渡带,必须加大窗口长度 N 。

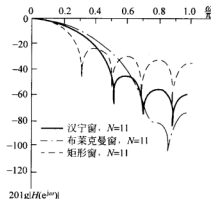


图 8.8 例 8.1 设计滤波器的幅度特性

8.3 利用频率取样法设计 FIR 滤波器

窗函数法是一种时域设计方法,但是在一般情况下,滤波器的技术指标都是由频域给出,在频域进行设计更为直接。频率取样法是在频率域对理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 取样,在取样点上设计的滤波器 $H(e^{j\omega})$ 和理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 幅度值相等,然后根据频率域的取样值得得实际设计的滤波器的频率特性 $H(e^{j\omega})$ 。

设理想滤波器的频率特性为 $H_d(e^{j\omega})$,对它在 $[0, 2\pi]$ 区间内等间隔地取样 N 个点,即

$$H(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \quad (8.40)$$

根据频域内插公式,可得

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \quad (8.41)$$

对应的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (8.42)$$

其中 $\phi(\omega)$ 是内插函数,即

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (8.43)$$

从式(8.42)可以看出,根据理想滤波器频率特性的 N 个取样值,可以通过插值得到实际设计的滤波器的频率特性,并且所设计的滤波器在取样点上的取值与理想滤波器的值严格相等。这就是频率取样法设计 FIR 数字滤波器的基本原理。

在很多情况下要求设计的滤波器具有线性相位,前面讨论的滤波器的线性相位条件表述为 $h(n) = \pm h(N-n-1)$ 。当 $h(n)$ 为偶对称(即 $h(n) = h(N-n-1)$),且 N 为奇数时

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (8.44)$$

并且幅度函数 $H(\omega)$ 应为偶对称的,即

$$H(\omega) = H(2\pi - \omega) \quad (8.45)$$

在 $[0, 2\pi]$ 区间内对 $H(e^{j\omega})$ 等间隔地取样 N 个点, 即

$$H(k) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_k e^{j\theta_k}$$

其中

$$H_k = H(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$\theta_k = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi k}{N} = -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

由式(8.45)可得

$$H_k = H_{N-k} \quad (8.46)$$

当 N 为偶数时, 幅度函数 $H(\omega)$ 应为奇对称的, 即

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega) \quad (8.47)$$

相位条件与 N 为奇数时相同。此时, H_k 也应满足奇对称要求, 即

$$H_k = -H_{N-k} \quad \text{且} \quad H_{N/2} = 0$$

当 $h(n)$ 为奇对称(即 $h(n) = -h(N-n-1)$), 按照同样的方法可以得到幅度和相位应满足的条件。

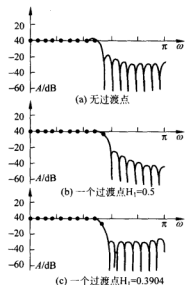


图 8.9 增加过渡点对幅频特性的影响

采用频率取样法设计的 FIR 数字滤波器在阻带内的衰减很小, 在实际应用中往往达不到要求。产生这种现象的原因是由于在通带边缘取样点的陡然变化而引起的起伏振荡。增加阻带衰减的方法是在通带和阻带的边界处增加一些过渡的取样点, 从而减小频带边缘的突变, 也就减小了起伏振荡, 增大了阻带最小衰减。图 8.9 表示在通带和阻带之间增加一个过渡取样值 H_1 的影响, 从图 8.9 中可以看出, 增加过渡取样值后, 滤波器阻带衰减明显下降。一般过渡带取一、二、三点取样值即可得到满意结果, 在低通滤波器设计中, 不加过渡取样点时, 阻带最小衰减为 -20dB , 增加一个过渡取样点, 阻带最小衰减可提高到 -44dB 到 -54dB 左右, 增加两个过渡取样点, 阻带最小衰减可达 -65dB 到 -75dB 左右, 而增加三个过渡取样点, 阻带最小衰减则可达 -85dB 到 -95dB 左右。

例 8.2 利用频率取样法, 设计一个线性相位低通滤波器, 要求截止频率 $\omega_c = 0.5\pi$, 取样点数 $N=33$ 。

解 理想低通滤波器幅频特性为

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 0.5\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $|H_d(e^{j\omega})|$ 是对称于 $\omega=\pi$ 的, 只需考虑 $0 \leq \omega \leq \pi$ 区间。对理想低通频率特性取样, 得

$$|H(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 8 \\ 0 & 9 \leq k \leq 16 \end{cases}$$

$$\theta(k) = -\frac{32}{33}k\pi$$

其频率特性如图 8.10 所示。进行 IDFT, 得到 $h(n)$, 计算其频率响应, 如图 8.11(a) 所示, 从图中可以看出, 在 $16\pi/33$ 到 $18\pi/33$ 之间增加了一个过渡带, 阻带最小衰减小于 -20dB 。这一衰减在大多数情况下是不令人满意的。为了改善频率特性, 以满足指标要求, 可在通带和阻带交界处增加一个或几个过渡点, 如取 $|H(9)| = 0.5$, 则得到如图 8.11(b) 所示结果, 过渡带加宽了一倍, 但阻带衰减加大到约 -30dB 。如果改变 $|H(9)| = 0.3904$, 其幅度特性如图 8.11(c) 所示, 阻带衰减可达 -40dB 。说明过渡点取值不同也会影响阻带衰减, 可以借助于计算机进行过渡带优化设计, 通过过渡点取值的改变达到最小阻带衰减最大。

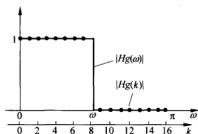


图 8.10 对理想低通进行取样

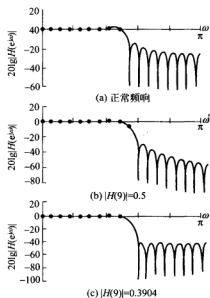


图 8.11 例 8.2 的幅度特性

频率取样方法的优点是可以直接在频域中进行设计, 通过调整过渡带的取样值得到良好的幅频特性, 但是频率控制点的位置只能在 $[0, 2\pi]$ 区间内的 N 个取样点上, 因而不能自由选择截止频率。如果要自由选择截止频率, 必须增加取样点数, 使得计算量加大, 这样做是不经济的。

8.4 FIR 数字滤波器的优化设计

前面分别介绍了 FIR 数字滤波器设计的窗函数法和频率取样法, 这两种方法都是通过理想滤波器进行逼近得到的。窗函数法是一种时域逼近法, 采用窗函数对理想滤波器的 $h_d(n)$ 截取一段作为待设计滤波器的 $h(n)$ 。频率取样法是频域设计方法, 对理想滤波器的幅频特性进行取样, 在取样点上设计的滤波器 $H(e^{j\omega})$ 和理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 幅度值相等, 而在取样点之间可以看作是采用内插函数对 $h_d(k)$ 插值得到的。这两种设计方法在通带和阻

带都存在幅度变化的波动。

FIR 滤波器的优化设计采用“最大误差最小化”的优化准则,根据滤波器的设计指标,导出一组条件,要求在此条件下,在整个逼近的频带范围内使得逼近误差绝对值的最大值为最小,从而得到惟一的最佳解。可以证明,采用最大误差最小化准则所得到的最优滤波器,在通带和阻带内必然呈等纹波特性。最大误差最小化准则也称为切比雪夫准则。采用切比雪夫准则设计的滤波器,误差在整个频带均匀分布,对同样的技术指标,这种逼近法需要的滤波器阶数低,而对同样的滤波器阶数,这种逼近法的最大误差最小。本节主要介绍加权切比雪夫等波纹逼近优化设计方法。

1. 切比雪夫最佳一致逼近法准则

设所希望设计的滤波器幅度函数为

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

其中, ω_p 为通带频率, ω_s 为阻带频率。FIR 滤波器的设计就是要设计一个 FIR 滤波器,其幅度函数 $H_e(\omega)$ 在通带和阻带内最佳地一致逼近 $H_d(\omega)$ 。在滤波器的设计中,通带和阻带的要求是不一样的,为了统一使用最大误差最小化准则,通常采用误差加权函数的形式。设误差加权函数为 $W(\omega)$,则加权误差为

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H_e(\omega)] \quad (8.48)$$

在要求逼近精度高的频带上, $W(\omega)$ 取值大;在要求逼近精度低的频带上, $W(\omega)$ 取值小。

为了保证设计出的滤波器具有线性相位, $h(n)$ 必须满足线性相位条件。现在以 $h(n)$ 为偶对称且 N 为奇数为例进行讨论。

将式(6.22)重写为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} H(\omega) \quad (8.49)$$

其中

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega), \quad M = \frac{N-1}{2} \quad (8.50)$$

将式(8.50)代入式(8.48),可得

$$E(\omega) = W(\omega) \left[H_d(\omega) - \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega) \right] \quad (8.51)$$

用函数 $H(\omega)$ 最佳一致逼近 $H_d(\omega)$ 的问题是寻找系数 $a(n)$, $n=0, 1, \dots, M$, 使加权误差函数 $E(\omega)$ 的最大绝对值达到最小,即

$$\min \left[\max_{\omega \in A} |E(\omega)| \right] \quad (8.52)$$

其中 A 表示所研究的频带。

“交错点限定理”指出 $H_e(\omega)$ 是 $H_d(\omega)$ 的最佳一致逼近的充要条件是误差函数 $E(\omega)$ 在 A 上至少呈现 $M+2$ 个“交错”,使得

$$\begin{aligned} E(\omega_i) &= -E(\omega_{i+1}) \\ |E(\omega_i)| &= \max_{\omega \in A} |E(\omega)| \end{aligned}$$

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 \cdots < \omega_{M+1}, \quad \omega \in A$$

如果已知 A 上的 $M+2$ 个交错点频率 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$, 由式(8.51)可得

$$W(\omega_k) \left[H_d(\omega_k) - \sum_{n=0}^M a(n) \cos n\omega \right] = (-1)^k \rho \quad (8.53)$$

其中, $k=0, 1, \dots, M+1$, 且

$$\rho = \max_{\omega \in A} |E(\omega)|$$

将式(8.53)写成矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \cos2\omega_0 & \cdots & \cos M\omega_0 & \frac{1}{W(\omega_0)} \\ 1 & \cos\omega_1 & \cos2\omega_1 & \cdots & \cos M\omega_1 & \frac{-1}{W(\omega_1)} \\ 1 & \cos\omega_2 & \cos2\omega_2 & \cdots & \cos M\omega_2 & \frac{1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\omega_M & \cos2\omega_M & \cdots & \cos M\omega_M & \frac{(-1)^{M+1}}{W(\omega_{M+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a_M \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(\omega_0) \\ H_d(\omega_1) \\ H_d(\omega_2) \\ \vdots \\ H_d(\omega_M) \\ H_d(\omega_{M+1}) \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

解此方程组, 可惟一求出系数 $a(n)$, $n=0, 1, \dots, M$ 和最大加权误差 ρ , 由式(8.49)确定最佳滤波器 $H(e^{j\omega})$ 。

但实际上这些交错点组的频率 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$ 是不知道的, 且直接求解式(8.54)也是比较困难的。为此, McClallan, J. H 等人利用数值分析中的 Remez 算法, 靠一次次迭代求得一组交错点组频率, 而且每一次迭代的过程中避免直接求解式(8.54)。下面介绍这种算法的步骤:

(1) 在频域等间隔取 $M+2$ 个频率 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$ 作为交错点的初始值。按下式计算 ρ 值

$$\rho = \frac{\sum_{k=0}^{M+1} a_k H_d(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{M+1} (-1)^k a_k / W(\omega_k)} \quad (8.55)$$

其中

$$a_k = (-1)^k \prod_{i=0, i \neq k}^{M+1} \frac{1}{\cos\omega_i - \cos\omega_k} \quad (8.56)$$

由式(8.55)计算出的 ρ 值是相当于初始交错点组所产生的偏差。利用拉格朗日(Lagrange)插值公式, 求出 $H(\omega)$, 即

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M \left(\frac{\beta_k}{\cos\omega - \cos\omega_k} \right) c_k}{\sum_{k=0}^M \frac{\beta_k}{\cos\omega - \cos\omega_k}} \quad (8.57)$$

其中

$$C_k = H_d(\omega_k) - (-1)^k \frac{\rho}{W(\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (8.58)$$

$$\beta_k = (-1)^k \prod_{i=0, i \neq k}^M \frac{1}{\cos \omega_i - \cos \omega_k} \quad (8.59)$$

把 $H(\omega)$ 代入式(8.51),求得误差函数 $E(\omega)$ 。如果对所有的频率都有 $|E(\omega)| \leq |\rho|$,说明 ρ 是纹波的极值,频率 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$ 是交错点组频率。一般第一次估计的位置不会恰好是交错点组,在某些频率可能 $|E(\omega)| > |\rho|$,说明需要交换初始交错点组中的某些点,形成一组新的交错点组。

(2) 对上次确定的 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$ 中每一点,都检查其附近是否存在某一频率 $|E(\omega)| > |\rho|$,如存在,在该点附近找出局部极值点,并用该点代替原来的点。待 $M+2$ 个点都检查过,便得到新的交错点组 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M+1}$,再次利用式(8.55)~式(8.59)求出 ρ , $H(\omega)$ 和 $E(\omega)$,于是完成了一次迭代,也就完成了一次交错点组的交换。

(3) 利用和(2)相同的方法,把各频率处使 $|E(\omega)| > |\rho|$ 的点作为新的局部极值点,从而又得到一组新的交错点组。

重复以上步骤,因为新的交错点组的选择都是作为每一次求出的 $E(\omega)$ 的局部极值点,因此,在迭代中,每次的 $|\rho|$ 都是递增的。 ρ 最后收敛到自己的上限,此时 $H(\omega)$ 最佳一致逼近 $H_d(\omega)$ 。此时若再迭代,误差曲线 $E(\omega)$ 的峰值将不会大于 $|\rho|$,此时迭代结束。由最后一组交错点组,按式(8.57)算出 $H(\omega)$,再由 $H(\omega)$ 求出 $h(n)$ 。算法流程如图 8.12 所示。

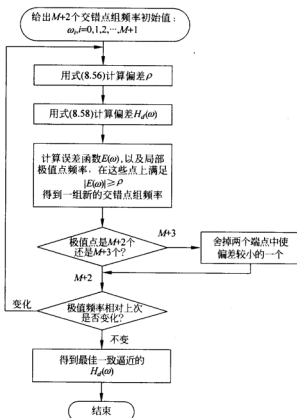


图 8.12 Remez 算法流程图

利用切比雪夫逼近法设计 FIR 滤波器,由于采用了等波纹逼近,误差均匀地分布在频带中,可以得到优良的滤波特性,这是一种滤波器的优化设计方法。它比先前介绍的窗函数法和频率取样法,在同样过渡带较窄的情况下,通带最平稳,阻带有最大的最小衰减。

2. 线性相位 FIR 滤波器四种形式的统一表示

前面只针对 $h(n)$ 为偶对称且 N 为偶数进行讨论,下面介绍线性相位 FIR 滤波器的其他三种情况。在 6.4 节中已经推导了线性相位 FIR 滤波器的四种形式,即

(1) $h(n)$ 为偶对称, N 为奇数。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos \omega n, \quad M = \frac{N-1}{2} \quad (8.60)$$

(2) $h(n)$ 为偶对称, N 为偶数。

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^M b(n) \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega, \quad M = \frac{N}{2} \quad (8.61)$$

(3) $h(n)$ 为奇对称, N 为奇数。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M c(n) \sin \omega n, \quad M = \frac{N-1}{2} \quad (8.62)$$

(4) $h(n)$ 为奇对称, N 为偶数。

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^M d(n) \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega, \quad M = \frac{N}{2} \quad (8.63)$$

$H(\omega)$ 可以统一表示为

$$H(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \quad (8.64)$$

其中 $Q(\omega)$ 和 $P(\omega)$ 如表 8.1 所示。

表 8.1 线性相位 FIR 滤波器四种情况

表 达 式		$H(\omega)$	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	M
偶对称 $h(n) = h(N-n-1)$	N 为奇数	$\sum_{n=0}^M a(n) \cos \omega n$	$\sum_{n=0}^M a(n) \cos \omega n$	1	$(N-1)/2$
	N 为偶数	$\sum_{n=1}^M b(n) \cos[\omega(n-0.5)]$	$\sum_{n=1}^M \bar{b}(n) \cos(\omega n)$	$\cos(\omega/2)$	$N/2$
奇对称 $h(n) = -h(N-n-1)$	N 为奇数	$\sum_{n=0}^M c(n) \sin(\omega n)$	$\sum_{n=0}^M \bar{c}(n) \cos(\omega n)$	$\sin \omega$	$(N-1)/2$
	N 为偶数	$\sum_{n=1}^M d(n) \sin[\omega(n-0.5)]$	$\sum_{n=1}^M \bar{d}(n) \cos(\omega n)$	$\sin \omega$	$N/2$

表中 $\bar{b}(n)$ 、 $\bar{c}(n)$ 、和 $\bar{d}(n)$ 与原系数 $b(n)$ 、 $c(n)$ 和 $d(n)$ 之间关系如下:

$$\begin{cases} b(1) = \bar{b}(0) + \frac{1}{2} \bar{b}(1) \\ b(n) = \frac{1}{2} [\bar{b}(n-1) + \bar{b}(n)] \\ b(M) = \frac{1}{2} \bar{b}(M-1) \\ n = 2, 3, \dots, M-1 \end{cases} \quad (8.65)$$

$$\left\{ \begin{aligned} c(1) &= \bar{c}(0) - \frac{1}{2} \bar{c}(2) \\ c(n) &= \frac{1}{2} [\bar{c}(n-1) - \bar{c}(n+1)] \\ c(M-1) &= \frac{1}{2} \bar{c}(M-2) \\ c(M) &= \frac{1}{2} \bar{c}(M-1) \\ n &= 2, 3, \dots, M-2 \end{aligned} \right. \quad (8.66)$$

$$\left\{ \begin{aligned} d(1) &= \bar{d}(0) - \frac{1}{2} \bar{d}(1) \\ d(n) &= \frac{1}{2} [\bar{d}(n-1) - \bar{d}(n)] \\ d(M) &= \frac{1}{2} \bar{d}(M-1) \\ n &= 2, 3, \dots, M-1 \end{aligned} \right. \quad (8.67)$$

将式(8.64)代入式(8.48),得到

$$E(\omega) = W(\omega) [H_d(\omega) - P(\omega)Q(\omega)] = W(\omega)Q(\omega) \left[\frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right]$$

令

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \quad (8.68)$$

$$\hat{H}_d(\omega) = \frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} \quad (8.69)$$

则

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)] \quad (8.70)$$

上列各式中要保证 $Q(\omega) \neq 0$, 因此要除去 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 的点。式(8.68)~式(8.70)即是四种情况的统一表达式。这样设计滤波器时, 给定技术指标后, 首先要根据具体选用的情况, 按照式(8.68)~式(8.70), 进行统一表达式的转换, 再按前面介绍的算法进行设计。

8.5 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较

前面讨论了 IIR 和 FIR 滤波器的设计方法, 下面对这两种滤波器作一简单的比较, 以便在实际运用时正确地选用它们。

(1) IIR 滤波器存在着输出对输入的反馈, 因此可以用比 FIR 滤波器少的阶数来满足技术指标, 这样, IIR 滤波器所用的存储单元和所需的运算次数都比 FIR 滤波器少。例如用频率取样法设计阻带衰减为 -20dB 的 FIR 滤波器, 其阶数要 33 阶才能达到要求, 而如果用双线性变换法设计一个切比雪夫 IIR 滤波器, 只需 4~5 阶就可以达到同样的指标, 所以 FIR 滤波器的阶数要高 5~10 倍。另外, FIR 滤波器可得到严格的线性相位, 而 IIR 滤波器

则做不到这一点。IIR 滤波器的选频特性越好,则相位的非线性就越严重。如果要求 IIR 滤波器具有线性相位,同时又要求它满足幅度要求,那么就必须用一个全通网络进行相位校正,这必然会大大增加滤波器的节数和复杂性。因此在需要严格线性相位的情况下应该选择 FIR 滤波器。

(2) IIR 滤波器必须采用递归结构实现,只有当所有极点都在单位圆内时滤波器才是稳定的。但在实际中由于存在有限字长效应,滤波器有可能变得不稳定。而 FIR 滤波器主要采用非递归结构,因而从理论上以及从实际的有限精度的运算中,都是稳定的。另外, FIR 滤波器可以采用快速傅里叶变换(FFT)来实现,在相同阶数下,运算速度可以快很多。

(3) IIR 滤波器可利用模拟滤波器现成的设计公式、数据和表格,因而计算工作量较小,对计算工具要求不高。FIR 滤波器没有现成的设计公式,窗函数法只给出窗函数的计算公式,但计算通带和阻带衰减仍无显式表达式。一般来说, FIR 滤波器的设计只有计算机程序可以利用,因此对计算工具要求较高,要借助计算机来设计。另外, IIR 滤波器主要是设计规格化的、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通、带阻和全通滤波器,而 FIR 滤波器可设计出理想正交变换器、理想微分器及线性调频器等各种网络,适应性较广。

从以上比较可以看出, IIR 与 FIR 滤波器各有特点,所以可以由实际应用时的要求,从多方面考虑来加以选择。

8.6 FIR 数字滤波器的 Matlab 仿真实现

8.6.1 窗函数法设计 FIR 滤波器

窗函数法通过对理想滤波器的单位取样响应加窗来逼近理想滤波器,函数 `fir1` 用于设计标准的低通、带通、高通和带阻滤波器,其调用方式为

```
>> b = fir1(n, Wc, 'ftype', Windows)
```

其中, n 为滤波器阶数, W_c 为截止频率, `ftype` 决定滤波器类型, `ftype = high` 时,设计高通 FIR 滤波器, `ftype = stop` 时,设计带阻 FIR 滤波器。 `Windows` 指定窗函数类型,默认为 Hamming 窗;可选的窗包括 Hanning 窗、Hamming 窗、Blackman 窗、triangle 窗、bartlett 窗和 boxcar 窗,每种窗都可以由 Matlab 的相应函数生成。

例 8.3 设计一个 15 阶的 FIR 低通滤波器,截止频率为 0.2π ,程序段为

```
>> b = fir1(15, 0.2);  
freqz(b, 1, 512);
```

函数 `freqz(b, a, N)` 用于计算由 a 和 b 构成的数字滤波器的频率响应,并用图形方式分别表示其幅度响应和相位响应。程序运行结果如图 8.13 所示。

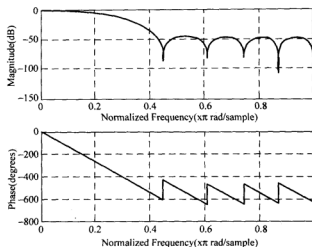


图 8.13 例 8.3 的幅频特性和相频特性

8.6.2 FIR 滤波器的优化设计

前面介绍了 FIR 滤波器的优化设计方法,通过迭代的方法求解 FIR 滤波器,过程十分复杂。在 Matlab 中,可以调用函数 `remez` 实现滤波器的设计。

```
>>b=remez(n, f, m)
```

函数 `remez` 采用 Parks-McClellan 算法设计线性相位 FIR 滤波器, n 为滤波器阶数,其幅频特性由 f 和 m 指定。

例 8.4 采用 Parks-McClellan 算法设计一个 17 阶的带通滤波器,并画出期望的幅频特性曲线和实际的幅频特性曲线,程序段为

```
>>f=[0 0.3 0.4 0.6 0.7 1];
n=[0 0 1 1 0 0];
b=remez(17,f,m);
[h,w]=freqz(b,1,512);
plot(f,m,w/pi,abs(h));
```

程序运行的结果如图 8.14 所示。

思考练习

1. 窗函数法和频率取样法是如何保证所设计的滤波器具有线性相位的?
2. 利用频率取样法实现例 8.3。

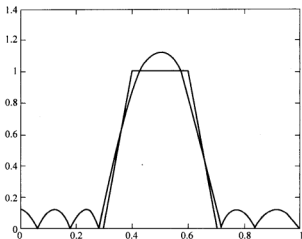


图 8.14 例 8.4 的幅频特性

习 题

8.1 用矩形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器, 已知 $\omega_c = 0.5\pi$, $N = 21$ 。画出 $h(n)$ 和 $20\log_{10} |H(e^{j\omega})|$ 的曲线。

8.2 用矩形窗设计线性相位低通滤波器, 逼近滤波器传输函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

(1) 求出相应于理想低通的单位脉冲响应 $h_d(n)$;

(2) 求出矩形窗设计法的 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 之间的关系;

(3) N 为奇数或偶数对滤波特性有什么影响?

8.3 利用矩形窗、升余弦窗、改进升余弦窗和布莱克曼窗设计线性相位 FIR 低通滤波器, 要求通带截止频率 $\omega_c = \pi/4 \text{ rad}$, $N = 21$ 。求出分别对应的单位脉冲响应, 给出它们的幅频特性并进行比较。

8.4 用矩形窗设计线性相位高通滤波器, 其中

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\omega - \pi)\alpha} & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & 0 < \omega < \pi - \omega_c \end{cases}$$

求出 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 之间的关系。

8.5 用频率取样法设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器, 已知 $\omega_c = 0.5\pi$, $N = 51$ 。画出 $h(n)$ 和 $20\lg |H(e^{j\omega})|$ 的曲线。

8.6 用频率取样法设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器, 已知 $N = 16$, 给定希望滤波器的幅度取样值为

$$H_d(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.389 & k = 4 \\ 0 & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

8.7 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{5}(1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-4} + 3z^{-5} + z^{-6})$$

试求 $h(n)$ 的表达式, 并求 $H(e^{j\omega})$ 的幅度响应和相位响应, 判断是否具有线性相位结构。

8.8 如果一个线性相位带通滤波器的频率响应为

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = H_{BP}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

(1) 试证明一个线性相位带阻滤波器可以表示成

$$H_{BR}(e^{j\omega}) = [1 - H_{BP}(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

(2) 试用带通滤波器的单位脉冲响应 $h_{BP}(n)$ 表示带阻滤波器的单位脉冲响应 $h_{BR}(n)$ 。

第9章

数字信号处理中的有限字长效应

9.1 引言

前面讨论的数字信号与系统都未涉及数字的精度问题,故可称为无限精度的信号处理。但实际上,无论是用专用硬件,还是在计算机上用软件来实现数字信号处理,输入信号的每个取样值、算法中要用到的参数以及任何中间计算结果和最终计算结果,都用有限位的二进制数来表示,所有这些都将使原系统的精度受到限制。这样,实际实现的系统相对于原设计的系统就出现了误差,甚至使所实现的系统达不到设计要求。通常把这种由于二进制数的位数有限而造成的计算结果的误差或处理性能的变坏,称为有限字长效应。误差分析中,有限字长效应是一个必须考虑的重要问题。

研究有限字长影响的目的是有两个:

(1) 如果数字信号处理系统是在通用计算机上实现的,这时字长已经固定,为了了解处理结果的可信程度,必须做误差分析。当不满足要求时可采取进一步的措施。由于计算机字长较长,已从8位提高到16位、32位及64位等,对于一般运算误差要求可不必考虑有限字长效应。

(2) 在用硬件实现数字信号处理(一般用定点实现)时,由于超大规模集成电路工艺的发展,数字硬件的字长从8位增加到12位、16位和32位,这就大大减小了由于有限字长效应引起的误差,同时减小了对有限字长效应的严重关切。但考虑到成本、复杂性以及速度问题,还不能选用更长的字长,对有限字长效应必须充分考虑。设计者必须要了解为达到某种精度至少需要使用多少字长,以便在设备的造价和精度之间作出满意的折中选择。

本章针对定点和浮点实现的数字滤波器和快速傅里叶变换中,上述各项有限字长的影响进行一般讨论,并对某些特殊情况给以详尽的分析。在分析讨论中将运用表示数字信号处理系统量化效应的非线性模型和统计模型。下面先从数的表示对量化的影响开始讨论。

9.2 数的表示及其运算对量化的影响

9.2.1 定点运算和浮点运算

1. 定点运算

在整个运算中,二进制小数点在数码中的位置是固定不变的,称为定点运算。定点制中

小数点右边各位表示数的小数部分,而左边各位表示数的整数部分。当小数点位于最低有效位右边时,属纯整数。但定点运算中,一般不采用纯整数运算。因为两个定点整数相乘得到的仍然是定点整数,其位数等于参加运算的两整数的位数之和。为了把和的位数限制到规定的字长,不得不采用截尾和舍入处理,这将造成很大的误差。若将小数点固定在二进制数中间任何位置,那么每次乘法运算之后都必须重新确定小数点在乘积中的准确位置,显然这是很不方便的。定点纯小数不会存在上述两方面的问题,因为两个绝对值小于1的定点纯小数的乘积仍然是定点纯小数,字长相应地要增加一倍。为此,定点表示的数每次相乘后需要进行截尾或舍入尾数处理,使结果仍然保持原有字长,这样就必然会带来截尾或舍入误差,但一般误差不会很大。此外,定点纯小数相乘的结果永远不会产生溢出。虽然定点纯小数相加有可能产生溢出,但这可通过比例因子来避免。因此,定点运算中,通常都是用纯小数来参加运算。为此,在用二进制数表示之前,通常都要让十进制数乘以一个适当的比例因子,使它的数值限制在 $(-1,1)$ 范围内,即将它变成纯小数。

2. 浮点运算

定点二进制的缺点是表数动态范围小,且需要考虑加法运算中的溢出问题。浮点表示克服了缺点,它有很大的动态范围,可避免溢出,不需要比例因子。浮点表示是将一个数表达为尾数和指数两部分的乘积,即

$$N = \pm 2^j S \quad (9.1)$$

S 称为数 N 的尾数部分, 2^j 是数 N 的指数部分, j 是阶数,称为“阶码”。阶码 j 表示小数点的位置。例如二进制数 10011.101 按式(9.1)可表示为

$$10011.101 = 2^{101} \times 0.10011101$$

浮点数一般是把尾数当作带符号的定点数来表示。于是尾数的第一位就表示浮点数的符号。阶码 j 也是一带符号的定点数,这是由于要用负的阶码表示数值小于0.5的数。

浮点表示数的小数点是浮动的。一般通用计算机中往往同时使用定点、浮点两种表示法,称为定-浮两用机。

在浮点数中,位数 b 必须分为两部分,尾数用 b_m 位,阶码用 $b_e = b - b_m$ 位。这时浮点表示法表示数的范围是

$$2^{-(2^{b_e}-1)} \times 2^{-b_m} \leq |N| \leq 2^{(2^{b_e}-1)} \times (1 - 2^{-b_m}) \quad (9.2)$$

浮点表示法尾数字长决定浮点表示的运算精确度,而阶码的字长决定了浮点表示的动态范围。在 b 值一定时,阶码用的位数越多,表示数的动态范围就越大,但表示这些数的精确度也越小。在大多数浮点运算的实际情况下,如用高级语言的计算机仿真, b_m 近似等于 $36/4$ 。

为提高运算精度,不丢失运算过程中的有效位数,在浮点制中总是使尾数的最高位为1,称为规格化数的表示形式。这时尾数 S 是小数,且满足 $1/2 \leq S < 1$ 。当二进制尾数最高位为0时, $S < 1/2$,就是非规格化数。如 $N = 0.011 \times 2^{110}$ 就是非规格化数。这时只要移动尾数的小数点并调整阶码,使得 $N = 0.110 \times 2^{101}$,即可实现浮点数的规格化。

浮点运算中乘法是尾数相乘,阶码相加。尾数相乘的过程与定点表示法相同,因此也要作截尾或舍入处理。尾数相乘的结果可能是非规格化数,必须重新规格化。

两浮点数相加,如它们的阶码相同,则只要两尾数相加就得到和数的尾数,和数的阶码

则为两数原来的阶码。阶码数不等的两浮点数相加,按下述规则进行:

第一,先进行对阶,这时要让小阶向大阶看齐,阶小的尾数小数点要左移,左移一位,阶码加1,直至两数的阶码相等。

第二,进行尾数相加。

第三,使结果规格化,并作尾数处理。

例如两个二进制浮点数

$$N_1 = 2^{11} \times 0.1001; \quad N_2 = 2^{01} \times 0.1100$$

为求它们之和应先对阶,即令 N_2 的尾数小数点左移两位而阶码加2得 $N_2 = 2^{11} \times 0.0011$ 。然后进行两数相加得 $N = N_1 + N_2 = 2^{11} \times 0.1100$ 。因为此和数的尾数已落在 $1/2$ 到 1 之间,所以不必规格化,否则应对尾数作规格化处理。

浮点数的相加和相乘运算,尾数的位数都可能超过寄存器长度,都需要作尾数量化处理,因而都有量化误差。

9.2.2 负数的原码、补码、反码表示

定点制与浮点制的 $(b+1)$ 位码尾数的形式为

$$X_0, X_1 X_2 \cdots X_b \quad (9.3)$$

其中整数位 X_0 表示符号位, $X_1 X_2 \cdots X_b$ 表示 b 位字长的尾数值。 X_i 表示第 i 位二进制码, X_i 可取 0 或 1。

对二进制数进行浮点运算时,主要是对其尾数进行计算。浮点表示的尾数是定点小数,因此,定点小数的运算是最基本的运算。二进制的定点小数通常有原码、反码和补码三种表示方法。对于正数,其原码、反码和补码是相同的,即小数点左边的符号位是 0,小数点右边是小数的绝对值或有效位。但负的定点小数的原码、反码和补码是有区别的。

1. 原码

若有一小数为

$$x = 0, X_1 X_2 \cdots X_b$$

用式(9.3)表示原码,有

$$[x]_{\text{原}} = \begin{cases} x = 0, X_1 X_2 \cdots X_b & \text{当 } x \text{ 为正数}(x \geq 0) \\ 1 + |x| = 1, X_1 X_2 \cdots X_b & \text{当 } x \text{ 为负数}(x \leq 0) \end{cases} \quad (9.4)$$

即,正定点小数的原码是它本身,负定点小数的原码表示为小数点左边的符号位是 1,小数点右边的各位是小数的绝对值。例如: $x = 0.101$ 表示 $+0.625$, 而 $x = 1.101$ 表示 -0.625 。对于零,原码中有两种表示法,即 $[+0]_{\text{原}} = 0.00 \cdots 0$; $[-0]_{\text{原}} = 1.00 \cdots 0$ 。式(9.4)表示的原码所代表的十进制数为

$$x = (-1)^{X_0} \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i} \quad (9.5)$$

两个原码表示的数相加,首先要判断两数的符号是否相同,相同就做加法,否则做减法。作减法时还要判断哪一个数的绝对值大,然后用大绝对值减去小绝对值,最后以绝对值较大的数的符号作为差值的符号。例如,为了用原码计算 $0.5625 - 0.6875$,首先将两个数用原

码表示, 0.5625 的原码是 0.1001, -0.6875 的原码是 1.1011, 后一个数的绝对值 0.1011 比前一个数的绝对值 0.1001 要大, 然后计算两绝对值之差:

$$0.1011 - 0.1001 = 0.0010$$

最后以绝对值较大的符号作为差值的符号, 得 1.0010, 对应于十进制数 -0.125 。由此可见, 原码运算无法避开减法运算, 这是它的不方便之处。

原码表示对乘法来讲是方便的, 因为两数乘积的符号是二数符号的逻辑加, 而数值是二数数值部分的乘积。另外, 乘法运算实际上可用加法运算来完成, 除法运算可用减法运算来完成。因此, 加法和减法是两种最基本的运算。如果能够用加法完成减法运算, 那么进行数值运算时就只有一种运算了。补码和反码就具有这样的特点。

2. 补码

补码表示法是把负数先加上 2, 以便将正数与负数的相加转化为正数与正数相加, 从而克服原码表示法作减法的困难。补码定义为

$$[x]_{\#} = \begin{cases} x & \text{当 } 1 > x \geq 0 \\ 2+x & \text{当 } 0 > x \geq -1 \end{cases} \quad (9.6)$$

很明显对于正数, 不存在求补码问题, 正数的补码就是正数本身, 即其表示与原码完全相同。可以证明, 若 $[x]_{\#} = X_0.X_1X_2\cdots X_n$, 则补码所代表的十进制数为

$$x = -X_0 + \sum_{i=1}^n X_i 2^{-i} \quad (9.7)$$

在补码表示法中, 零的表示是惟一的, 即 $[+0]_{\#} = [-0]_{\#} = 0.00\cdots 0$ 。

由于负数的补码是 $2+x$, 故求负数的补码时实际上要作一次减法, 这是不希望的。可以发现, 只要对原码的尾数每位取反, 再在所得之数的末位加 1, 则正好得到补码。这种方法, 简称为对尾数的“取反加 1”。反之, 当 $0 > x \geq -1$ 时, 同样可通过对 $[x]_{\#}$ 的尾数“取反加 1”来得到 $[x]_{\#}$ 。因此 $[[x]_{\#}]_{\#} = [x]_{\#}$ 。

补码表示法可把减法与加法统一起来。当两个定点正小数作减法运算时, 可用被减数的补码(也就是原码)与减数的补码相加, 但是要注意符号位也同样参加运算, 如果符号位发生进位, 把进位的 1 丢掉就行了。

例如 $0.5625 - 0.6875$, 0.5625 的补码和原码相等, 是 0.1001; -0.6875 的原码是 1.1011, 则其补码为 $1.0100 + 0.0001 = 1.0101$; 则 $0.1001 + 1.0101 = 1.1110$, 符号位是 1, 说明相加后的结果为负数, 再对 1.1110 求补码就可到其原码为 1.0010, 即十进制数 -0.125 。若 $0.6875 - 0.5625$ 两个数的补码分别为 0.1011 和 1.0111, 相加为 $0.1011 + 1.0111 = 10.0010$, 符号产生进位溢出, 丢掉进位 1, 得到的结果是 0.0010, 表示正数, 直接对应于十进制数 0.125。

3. 反码

和补码一样, 正数的反码与原码相同。对于负数: $X = -0.X_1X_2\cdots X_n$, 其反码则为

$$[x]_{\bar{}} = 1.\bar{X}_1\bar{X}_2\cdots\bar{X}_n$$

其中 \bar{X}_i 为 X_i 的反码, 即 $X_i = 0$, 则 $\bar{X}_i = 1$; $X_i = 1$, 则 $\bar{X}_i = 0$, 因而在求一负数的反码时, 只要把负数原码中小数点后的每一位 0 变 1, 1 变 0, 符号位的“1”保持不变即可。零的反码有

两种表示法,即

$$[+0]_{\text{反}} = 0.00\dots0; \quad [-0]_{\text{反}} = 1.11\dots1$$

\bar{X}_i 为 X_i 的反码,实际上就是 \bar{X}_i 为 X_i 按位对 1 的补码,即

$$[X]_{\text{反}} = 1.11\dots11 - \underbrace{|x|}_{b\text{位}} = (2 - 2^{-b}) + x$$

由此可给出反码的定义

$$[x]_{\text{反}} = \begin{cases} x & \text{当 } 1 > x \geq 0 \\ (2 - 2^{-b}) + x & \text{当 } 0 \geq x > -1 \end{cases} \quad (9.8)$$

从上式可得

$$[x]_{\text{反}} = (2 + x) - 2^{-b} = [x]_{\text{补}} - 2^{-b}$$

$$[x]_{\text{补}} = [x]_{\text{反}} + 2^{-b} \quad (9.9)$$

式(9.9)给出了负数补码和反码表达式之间的简单关系。由此可得前面提到的求负数补码的简单方法。

根据式(9.9)可直接由补码所代表的十进制数值表示式,求得如下的反码所代表的十进制数值表示式

$$x = -X_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i} \quad (9.10)$$

一般地说三种码各有优缺点,三种表示法的选取决定于程序设计和(或)硬件设备方面的考虑。例如加法器硬件习惯上多用补码制,而串行乘法器通常用原码表示。

9.2.3 截尾效应和舍入效应

不论是定点乘法,还是浮点乘法和加法,运算完毕后都会使字长增加。因此,需要对尾数进行截尾或舍入处理。设二进制数原来的字长是 $b_1 + 1$ 位(包括小数点左边的符号位),要求其限制到 $b + 1$ 位。截尾的方法是直接去掉最右边的 $b_1 - b$ 位。舍入的方法是:当最右边的 $b_1 - b$ 位的值大于 2^{-b-1} 时,在舍去最右边的 $b_1 - b$ 位的同时,要在剩下的数的末尾(位权是 2^{-b})上加 1,这就是所谓的“入”;而当最右边的 $b_1 - b$ 位的值小于 2^{-b-1} 时,就只是舍去就行了,这就是所谓的“舍”。两种方法所引入的误差取决于所用的二进制数的位数、数的表示方式(定点或浮点)、负数的表示法和对尾数超长的处理方法。下面分不同情况进行讨论。

1. 定点系统的截尾和舍入误差

1) 截尾误差

当定点系统采取截尾处理时,对于正数,三种码的表示法是相同的,因而量化的影响也是相同的。一个字长为 $b_1 + 1$ 位的正数 x

$$x = \sum_{i=1}^{b_1} X_i 2^{-i}$$

对 x 进行截尾,得到 $b + 1$ 位的小数,即被截去最右边的 $b_1 - b$ 位。若以 $[\cdot]_T$ 表示截尾处理,则

$$[x]_T = \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

若以 E_T 表示截尾误差, 则

$$E_T = [x]_T - x = - \sum_{i=b+1}^{b_1} X_i 2^{-i} \quad (9.11)$$

式(9.11)表明 E_T 为负值或零。当被截掉的部分都是 1 时, 截尾误差达到最大值, 用 $E_{T\max}$ 表示, 其值为

$$E_T = E_{T\max} = - \sum_{i=b+1}^{b_1} 2^{-i} = - (2^{-b} - 2^{-b_1}) = -q + 2^{-b_1}$$

其中 $q = 2^{-b}$, 即 q 是截尾后二进制数末位的位权, 称其为“量化宽度”或“量化阶”。因此, 正数的截尾误差 E_T 为

$$-q < -(q - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0 \quad \text{或} \quad -q < E_T \leq 0 \quad (9.12)$$

对于负小数来说, 截尾误差 E_T 与负数的表示方式有关, 即原码、反码和补码的截尾误差有所不同, 讨论如下:

对于原码, $X_0 = 1$, b_1 位原码所代表的十进制数值为

$$x = - \sum_{i=1}^{b_1} X_i 2^{-i}$$

$$[x]_T = - \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

$$E_T = [x]_T - x = \sum_{i=b+1}^{b_1} X_i 2^{-i}$$

这时 E_T 是正的, 应满足下列不等式

$$0 \leq E_T \leq (2^{-b} - 2^{-b_1}) \quad (9.13a)$$

或写为

$$0 \leq E_T < q \quad (9.13b)$$

例如, 三个 $b_1 = 4$ 的原码负数 1.0100、1.0101 和 1.0111, 分别表示 $-1/4$ 、 $-5/16$ 及 $-7/16$ 。它们被截尾为 $b=2$ 位后成为 1.01, 表示 $-1/4$, 因此截尾误差分别为

$$E_{T_1} = 0, \quad E_{T_2} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{16}, \quad E_{T_3} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{7}{16}\right) = \frac{3}{16}$$

对于补码负数, $X_0 = 1$, b_1 位补码所代表的十进制数值为

$$x = -1 + \sum_{i=1}^{b_1} X_i 2^{-i}$$

$$[x]_T = -1 + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

$$E_T = [x]_T - x = - \sum_{i=b+1}^{b_1} X_i 2^{-i}$$

这个误差与正数时一样, 仍是负的, 也即

$$-q < -(q - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0 \quad \text{或} \quad -q < E_T \leq 0 \quad (9.14)$$

例如, $x=1.1011(-0.3125)$, $[x]_T=1.10(-0.5)$, $E_T=[x]_T-x=(-0.5)-(-0.3125)=-0.1875<0$ 。

对于反码负数, $X_0=1$, b_1 位反码所代表的十进制数值为

$$x = -1 + \sum_{i=1}^{b_1} X_i 2^{-i} + 2^{-b_1}$$

$$[x]_T = -1 + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i} + 2^{-b}$$

$$E_T = [x]_T - x = - \sum_{i=b+1}^{b_1} X_i 2^{-i} + (2^{-b} - 2^{-b_1})$$

截尾误差范围为

$$0 \leq E_T \leq (2^{-b} - 2^{-b_1}) \text{ 或 } 0 \leq E_T < q \quad (9.15)$$

与原码相同, E_T 为正值。例如 $x=1.1001(-0.375)$, $[x]_T=1.10(-0.25)$, $E_T=[x]_T-x=(-0.25)-(-0.375)=0.125>0$ 。

2) 舍入误差

设 b_1 为舍入前小数点右边的位数, b 表示舍入后小数点右边留下的位数, 则舍入处理将根据最右边 b_1-b 位数的绝对值相对于 2^{-b-1} 的大小来决定, 与原数的正负无关, 所以与二进制数采用什么码无关。显然, 舍入的最大误差绝对值是 $\frac{1}{2} \cdot 2^{-b}$, 以 E_R 表示舍入误差, 则

$$-\frac{1}{2} 2^{-b} < E_R \leq \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (9.16a)$$

或写为

$$-\frac{q}{2} < E_R \leq \frac{q}{2} \quad (9.16b)$$

由于舍入是根据数的绝对值进行的, 所以不论是正数、负数, 也不论负数是按原码、补码或反码表示, 其误差总是在 $\pm q/2$ 之间。有时被舍入的数恰好处在两个量化阶标准值正中间, 这时可规定恒取上入, 恒取下舍, 或是采用随机舍入。例如

$x=0.1001$, $[x]_R=0.10$, 舍去 0.0001 , 误差为 -2^{-4} 。

$x=0.1011$, $[x]_R=0.11$, 将 0.0011 取入为 0.01 , 误差为 $+2^{-4}$ 。

$x=0.1010$, 则 x 与 0.10 及 0.11 距离相等, 因此 $[x]_R$ 既可以取 $[x]_R=0.10$, 也可以取 $[x]_R=0.11$, 一般可按类似于十进制的四舍五入的规则, 因此取 $[x]_R=0.11$ 。

图 9.1 和表 9.1 分别归纳了以上讨论的定点运算中的截尾和舍入误差的量化特性曲线和公式。

表 9.1 定点运算中的截尾和舍入误差 $q=2^{-b}$

		截尾误差	舍入误差
负数	正数	$-q < E_T \leq 0$	$-\frac{q}{2} < E_R \leq \frac{q}{2}$
	原码	$0 \leq E_T < q$	
	补码	$-q < E_T \leq 0$	
	反码	$0 \leq E_T < q$	

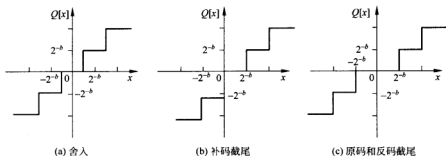


图 9.1 量化特性曲线

2. 浮点系统的截尾和舍入误差

浮点数的舍入和截尾处理只影响尾数部分,因而可运用定点误差分析的结果。但所产生误差的大小却与阶码有关,具体地说,尾数相同的误差,阶码越大的浮点数,它的误差越大,所以用相对误差比用绝对误差更能反映它的特点,以 ϵ 表示相对误差,则

$$\epsilon = \frac{[x] - x}{x} \quad (9.17)$$

而绝对误差为

$$E = [x] - x = \epsilon x$$

这是相乘性误差,而不是像定点系统那样为相加性误差。

当采用舍入处理时,尾数误差在 $\pm 2^{-b}$ 之间,若浮点数 x 的阶码为 j ,则浮点数的舍入误差为

$$-2^j \cdot \frac{1}{2} 2^{-b} < [x]_R - x \leq 2^j \cdot \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (9.18)$$

也即

$$-2^j \cdot \frac{1}{2} 2^{-b} < \epsilon_R x \leq 2^j \cdot \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (9.19)$$

由于浮点数 $x = \pm 2^j s$,其尾数部分是规格化的,即 $\frac{1}{2} \leq s < 1$,故有

$$2^{j-1} \leq |x| \leq 2^j \quad (9.20)$$

分 x 为正、负两种情况讨论。

当 x 为正时,有

$$2^{j-1} \leq x < 2^j \quad (9.21)$$

(1) 若 ϵ_R 为正,则

$$\epsilon_R 2^{j-1} \leq \epsilon_R x$$

利用式(9.19)右边不等式与上式联立,可得

$$\epsilon_R 2^{j-1} \leq 2^j \cdot \frac{1}{2} 2^{-b}$$

故有

$$\epsilon_R \leq 2^{-b} = q \quad (9.22)$$

(2) 若 ϵ_R 为负, 由式(9.21)有

$$\epsilon_R 2^{j-1} \geq \epsilon_R x$$

利用式(9.19)左边不等式与上式联立, 可得

$$\epsilon_R 2^{j-1} > -2^j \frac{1}{2} 2^{-b}$$

故有

$$\epsilon_R > -2^{-b} = -q$$

综上所述, 当 x 为正时, 有

$$-2^{-b} < \epsilon_R \leq 2^{-b} \quad (9.23)$$

当 x 为负时, 有

$$-2^{j-1} \geq x > -2^j$$

在 ϵ_R 为正及负两种情况下, 可得

$$-2^{-b} \leq \epsilon_R < 2^{-b} \quad (9.24)$$

综合正负两种情况, 由式(9.24)和式(9.23)可得浮点数舍入的相对误差范围应为

$$-q \leq \epsilon_R \leq q$$

上式对正数及负数的三种表示法都成立。

浮点截尾处理分正数与负数两种情况考虑, 同样可利用定点的结果。正数时截尾误差为

$$-q < E_T \leq 0$$

因此

$$-2^j 2^{-b} < \epsilon_T x \leq 0$$

考虑到

$$2^{j-1} \leq x < 2^j$$

因 $x > 0$, 必有 $\epsilon_T \leq 0$, 所以 $\epsilon_T x \leq 2^{j-1} \epsilon_T$, 从而可得出, 浮点制正数截尾相对误差为

$$-2q < \epsilon_T x \leq 0 \quad x > 0 \quad (9.25)$$

x 为原码、反码负数, 尾数截尾误差为

$$0 \leq E_T < q$$

因此

$$0 \leq \epsilon_T x < 2^j q \quad x < 0$$

因 x 为负数, 故有

$$-2^j < x \leq -2^{j-1}$$

$x < 0$, 必有 $\epsilon_T \leq 0$, 所以 $\epsilon_T x \geq -\epsilon_T 2^{j-1}$, 由此得出浮点制原码、反码负数的截尾相对误差为

$$-2q < \epsilon_T x \leq 0 \quad x < 0$$

x 为补码负数, 尾数的截尾误差为

$$-q < E_T \leq 0$$

因而

$$-2^j q < \epsilon_T x \leq 0$$

由于 $x < 0$, 有

$$-2^j < x \leq -2^{j-1}$$

$x < 0$, 必有 $\varepsilon_T \geq 0$, 所以 $\varepsilon_T x \leq -\varepsilon_T 2^{i-1}$, 因此得出浮点制补码负数截尾相对误差为

$$0 \leq \varepsilon_T < 2q \quad x < 0 \quad (9.26)$$

归纳起来, 浮点运算的截尾相对误差如表 9.2 所示。

表 9.2 浮点运算中的相对误差

		截尾误差	舍入误差
负数	正数	$-2q < \varepsilon_T \leq 0$	$-q \leq \varepsilon_R \leq q$
	原码	$-2q < \varepsilon_T \leq 0$	
	补码	$0 \leq \varepsilon_T < 2q$	
	反码	$-2q < \varepsilon_T \leq 0$	

为研究量化误差对数字信号处理系统精度产生的影响, 必须了解截尾和舍入误差的特性。最方便的办法是把这些量化误差看成是随机变量, 对每种误差示出其概率密度函数。虽然误差的范围已知, 但我们却不知道出现在此范围内某一误差的概率。一个合理的假设是设误差在整个可能出现的范围内均匀分布。在此假设下, 图 9.2 示出了定点和浮点表示法舍入及截尾误差的概率密度函数。对于定点算法, 变量是绝对误差 $E = [x] - x$, 对于浮点算法变量是相对误差 $\varepsilon = \frac{[x] - x}{x}$ 。

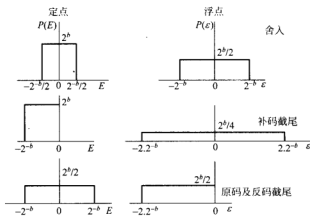


图 9.2 量化误差概率密度函数

9.3 输入信号的量化误差

9.3.1 A/D 转换器的量化效应

输入信号如果是模拟信号, 在进行数字处理时, 首先要将其取样和量化, 使之转换成一定字长的数字信号。模数(A/D)转换器就是将输入模拟信号 $x_a(t)$ 转换为 b 位数字信号输出的器件。典型的 b 值约为 12, 但它可能低至 8 或高至 20。图 9.3 为 A/D 转换器的简单方框图, 也是 A/D 转换器的非线性模型。在概念上可把转换视为两级过程: 第一级产生序

列 $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$, 这里 $x(n)$ 以无限精度表示; 第二级对每个取样序列 $x(n)$ 进行截尾或舍入的量化处理, 从而给出序列 $\hat{x}(n)$ 。实际上在 A/D 转换器中上述二级的过程是同时完成的, 即输入为 $x_a(t)$, 输出为 $\hat{x}(n)$ 。

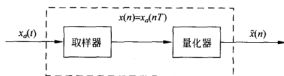


图 9.3 A/D 转换器的非线性模型

分析 A/D 转换器量化效应的目的在于选择合适的信号字长, 以满足信噪比指标。在具体讨论 A/D 转换器量化效应之前, 先对模拟信号作一些规定。

首先, 为使取样后不造成混叠失真, 模拟信号 $x_a(t)$ 必须是限带的。因此 A/D 转换器前一般都加一前置模拟低通滤波器, 对高于取样频率一半的频率至少衰减 40dB, 并且在信号基带内的带内波纹要尽可能小。对于语音处理, 八阶低通滤波器即可满足要求。

其次, 假定模拟波形已经规格化了。例如假设量化器输出取样值表示成 $b+1$ 位的补码定点小数, 二进制小数点后为 b 位。输入到量化器的精确取样值 $x(n)$ 舍入到最靠近的量化层标准值, 从而在量化器输出端得到了量化取样值 $\hat{x}(n)$ 。为了保证未量化的取样值处在 $b+1$ 位数的数值范围内。假设输入模拟波形已被规格化为

$$\left(-1 + \frac{2^{-b}}{2}\right) < x_a(nT) < \left(1 - \frac{2^{-b}}{2}\right) \quad (9.27)$$

即模拟波形应与量化器的动态范围相适应。由于量化时, 字长有限, 使得 $\hat{x}(n) \neq x(n)$, 从而产生量化误差(或称为序列的量化噪声) $e(n)$, 即

$$e(n) = \hat{x}(n) - x(n) \quad (9.28)$$

A/D 转换器的量化特性主要取决于所采用数的表示方式和量化方式。对于补码定点舍入处理, 由式(9.16(b))可知

$$-q/2 < e_R(n) \leq q/2$$

如果输入取样的精确值落在式(9.27)规定的范围之外, 将会产生附加的失真。当取样值超过 $1 - 2^{-b}/2$, 则皆取成量化值 $1 - 2^{-b}$ 。同样, 如果取样值小于 $-1 + 2^{-b}/2$, 则皆取成量化值 -1 , 这是不希望出现的限幅作用, 为此就应减小输入信号幅度直至式(9.27)得到满足。对于补码截尾处理, 由式(9.12)和式(9.13(b))可知, A/D 转换器的量化误差为

$$-q < e_T(n) \leq 0 \quad (9.29)$$

9.3.2 量化误差的统计分析

量化过程是一个非线性过程, 其等效的线性过程描述如图 9.4 所示。我们把量化取样值表示为

$$\hat{x}(n) = x(n) + e(n)$$

式中 $x(n)$ 为精确取样值, $e(n)$ 为量化误差。要使图 9.4 与图 9.3 准确地等效, 必须精确地知道所有 n 下的 $e(n)$ 值, 这几乎是不可能的, 同时也无此必要。一般只要知道量化误差的

一些平均效应就可以作为确定 A/D 转换器所需字长的依据,因此把图 9.4 看成是分析量化效应的统计模型。

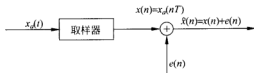


图 9.4 A/D 转换器的统计模型

为进行统计分析,对误差 $e(n)$ 的统计特性作如下假设:

- (1) $e(n)$ 是平稳随机序列;
- (2) $e(n)$ 与取样序列 $x(n)$ 不相关;
- (3) $e(n)$ 序列本身的任意两个值之间不相关,也即 $e(n)$ 是白噪声序列;
- (4) $e(n)$ 在误差范围内均匀分布。

上述假设说明,量化误差是一个与信号序列完全不相关的白噪声序列,它与信号的关系是相加性的。

以上假设是为了简化量化效应分析,有些情况并不满足这些假设。例如直流或正弦信号被取样量化时,显然不能认为误差是统计独立和白色的。实验验证和计算机模拟已经证明,只要信号足够复杂,量化间隔足够小(不小于 8 位时),则上述假设是成立的。对于反码和原码截尾来说,不能假设误差与信号互相独立无关,因为误差的符号与信号的符号总是相反的。

在上述假设下,可用统计的方法,例如用统计平均值、方差等来描述误差序列 $e(n)$ 。对于定点舍入情况,误差序列 $e(n)$ 的概率密度函数为

$$P[e(n)] = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} \leq e(n) < \frac{q}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 9.2 所示,可求出其均值与方差分别为

$$m_e = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e(n) P[e(n)] de(n) = 0 \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} [e(n) - m_e]^2 P[e(n)] de(n) \\ &= \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} e^2(n) de(n) = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \end{aligned} \quad (9.31)$$

对于定点补码截尾情况,误差序列 $e(n)$ 的概率密度函数为

$$P[e(n)] = \begin{cases} \frac{1}{q} & -q < e(n) \leq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 9.2 所示。可求出其均值与方差分别为

$$m_e = \int_{-q}^0 \frac{1}{q} e(n) de(n) = -\frac{q}{2} = -\frac{2^{-b}}{2} \quad (9.32)$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-q}^0 \left[e(n) + \frac{q}{2} \right]^2 \frac{1}{q} de(n) = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (9.33)$$

同样,对于定点原码及反码截尾情况(误差序列 $e(n)$ 的概率密度函数见图 9.2),也可求出其均值与方差为

$$m_e = 0 \quad (9.34)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{3} = \frac{2^{-2b}}{3} \quad (9.35)$$

由于假设误差序列是白噪声,故舍入误差的自协方差序列可表示为

$$C_e(n) = E[(e(n) - m_e)(e(m) - m_e)] = E[e(n)e(m)] = \sigma_e^2 \delta(n) \quad (9.36)$$

采用图 9.4 的统计模型对模拟取样信号作数字处理时,通常把量化误差看成是加性噪声序列,量化过程视尾数处理的不同,可看作是无限精确的信号与具有式(9.30)至式(9.35)所示的均值和方差的量化噪声的叠加。这时信噪比就成了衡量量化影响大小的一个重要指标。

对于舍入处理,设信号 $x(n)$ 的功率为 σ_x^2 ,则信噪比为

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{2^{-2b}/12} = 12 \times 2^{2b} \sigma_x^2$$

表示成分贝数则为

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \lg 12 + 20b \lg 2 + 10 \lg \sigma_x^2 \\ &= 10.79 + 6.02b + 10 \lg (\sigma_x^2)^2 \text{ (dB)} \end{aligned} \quad (9.37)$$

由此式可见,除了信号的 σ_x^2 值愈大,信噪比愈大这个明显道理之外,随着字长 b 的增大,信噪比也增大。因 $20 \lg 2 = 6.02$,所以字长每增加一位,相当于 SNR 增加约 6dB。

如果信号 $x(n)$ 的幅度 x 为 $-A < x < A$,那么,应将 x 乘以小于 1 的比例因子 $K = 1/A$,使 Kx 的动态范围归一化到 $(-1, 1)$ 。这样,被归一化的信号 Kx 的方差为 $K^2 \sigma_x^2$,所以此时的信噪比应为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{K^2 \sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10.79 + 6.02b + 10 \lg (\sigma_x^2)^2 + 20 \lg K \quad (9.38)$$

在上式中 K 小于 1,则 $\lg K$ 为负数,这就意味着,为了减小限幅失真所乘的比例因子 K 将使信噪比下降 $|20 \lg K|$ dB。

例 9.1 设 $x(n)$ 是一个在区间 $(-2, 2)$ 均匀分布的平稳随机信号,采用舍入量化,为使信噪比不低于 80dB,量化器的字长应为多少位?

解 对信号进行归一化的比例因子为 $K = 1/2$

信号的方差为(注意信号均值等于 0)

$$\sigma_x^2 = \int_{-2}^2 x^2 p_x(x) dx = \int_{-2}^2 x^2 \frac{1}{4} dx = \frac{4}{3}$$

将 $\text{SNR} \geq 80\text{dB}$ 、 $K = \frac{1}{2}$ 和 $\sigma_x^2 = \frac{4}{3}$ 代入式(9.38),可得

$$10.79 + 6.02b + 20 \lg \frac{1}{2} + 10 \lg \frac{4}{3} \geq 80 \text{ (dB)}$$

由上式求出 $b \geq 12.289$,取 $b = 13$ 。故应取量化器的字长为 13 位(不含符号位)。

很多模拟信号如语言和音乐,可以视为一个随机过程。因此可用概率分布来表示这些

信号。在幅值为零附近,概率分布出现峰值,而在幅度增大时,分布曲线迅速下降。一个给定取样序列的幅度超过信号均方值 3~4 倍的概率是非常小的。因此,如令 $K=1/4\sigma_x$ 则不出现限幅失真的概率是非常大的,此时信噪比为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{K^2 \sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{1}{16\sigma_e^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{3}{4} 2^{2b} \right) \approx 6b - 1.25 \quad (9.39)$$

式(9.39)是数字信号处理的一个重要的关系式。由式(9.39)可见,如果需要达到信噪比大于 80dB,至少需要采用字长 $b=14$ 比特。当然字长越长, A/D 转换器的信噪比越高,但字长过长也无必要,因输入信号 $x_a(t)$ 本身有一定信噪比, A/D 转换器的量化噪声比 $x_a(t)$ 的噪声电平更低是无意义的。

9.3.3 量化误差(白噪声)通过线性系统

下面讨论量化序列 $\hat{x}(n) = x(n) + e(n)$ 通过线性移不变系统,而且假定系统是完美理想的,即是无限精度的,也就是说系统实现时带来的误差以及运算带来的误差暂时都不考虑,把它们看成是独立于量化噪声而引起的误差,可独立计算,然后将结果叠加。

因为可以认为 $x(n)$ 和 $e(n)$ 不相关,且系统是线性的,根据叠加原理,系统的输出为

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \hat{x}(n) * h(n) = x(n) * h(n) + e(n) * h(n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) + \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(n-m) \\ &= y(n) + f(n) \end{aligned}$$

其中 $y(n)$ 是 $x(n)$ 的响应,即

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$f(n)$ 是量化噪声 $e(n)$ 的响应,即

$$\begin{aligned} f(n) &= \hat{y}(n) - y(n) = e(n) * h(n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(n-m) \end{aligned}$$

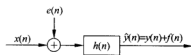


图 9.5 量化噪声通过线性系统

图 9.5 表示了量化噪声通过线性系统的框图。

由于 $e(n)$ 与 $x(n)$ 互不相关,故在计算输出噪声功率时,可以不管 $x(n)$ 的影响。因此,舍入噪声 $e(n)$ 造成的输出噪声 $f(n)$ 的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= E[f^2(n)] = E \left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(n-m) \sum_{l=0}^{\infty} h(l)e(n-l) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(m)h(l)E[e(n-m)e(n-l)] \end{aligned}$$

由于 $e(n)$ 是白色的,故 $e(n)$ 的各序列值之间互不相关,因而

$$E[e(n-m)e(n-l)] = \delta(m-l)\sigma_e^2$$

将它代入 σ_f^2 式中,可得

$$\sigma_f^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(m)h(l)\delta(m-l)\sigma_e^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) \quad (9.40)$$

根据帕塞瓦尔定理,考虑到 $h(n)$ 是实序列,则有

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

这样,式(9.40)可改写成

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (9.41)$$

或者在单位圆上计算,可得

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (9.42)$$

如果 $e(n)$ 是补码截尾白噪声,经过分析可知,输出噪声的方差仍为式(9.41)或式(9.42),但还有一个直流分量

$$\begin{aligned} m_f &= E[f(n)] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e(n-m)] \\ &= m_e \sum_{m=0}^{\infty} h(m) = m_e H(e^0) \end{aligned}$$

以上这些分析对于白噪声通过线性系统都是合适的,因此这些结果在下面讨论时还将用到。

9.4 数字滤波器的系数量化误差

在滤波器的理论设计阶段,计算出的滤波器系数通常是无限精确的。但在工程实际阶段,所有滤波器系数都是被量化了的,即系数都只能用有限字长的二进制数来表示,系数均不能准确地取所要求的值。所以,实际所得的系统函数 $H(z)$ 与所要求的有误差,即系统函数的极点和零点的实际位置也与设计预定位置不同,从而使系统的实际频响与所要求的频响出现偏差。严重时,IIR 系统的极点有可能移到 z 平面单位圆之外,使滤波器系统成为不稳定系统。

系数量化对滤波器的影响固然和字长有关,但也和滤波器的结构密切相关。因此选择合适的结构,对改善系数量化的影响是十分重要的。

9.4.1 系数量化误差对滤波器稳定性的影响

滤波器的稳定性取决于极点的位置,如果系数量化误差使单位圆内的极点移到了单位圆上或单位圆外,则滤波器的稳定性就被破坏了。FIR 滤波器除了在 $z=0$ 处有高阶极点外,没有别的极点,因而系数量化误差将主要影响零点的位置,不会对滤波器的稳定性构成威胁。但对 IIR 滤波器来说,情况就有所不同,因为 IIR 滤波器一般会存在多个极点。

设有一理想的稳定因果滤波器,其系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (9.43)$$

则其极点的精确位置可以由 $H(z)$ 分母多项式的根来决定, 即由方程

$$1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = \prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1}) = 0 \quad (9.44)$$

决定。如果由于系数的量化使某系数 a_i 引入误差 Δa_i , 变为 $a_i + \Delta a_i$, 则方程(9.44)变为

$$1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} - \Delta a_i z^{-i} = 0 \quad (9.45)$$

为了方便讨论, 假设该系数的量化误差使一个极点移到单位圆上, 即移到 $z=1$ 。下面来求使极点移到单位圆上的 $|\Delta a_i|$ 值, 由式(9.45)得

$$|\Delta a_i| = \left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i \right| = \prod_{i=1}^N |1 - p_i| \quad (9.46)$$

由于转移到单位圆上的极点必定比较靠近单位圆, 则系数量化误差将使该极点同时被引入一个误差 Δp_i , 则 $\Delta p_i \ll 1$, 因此可得 $|\Delta a_i| \ll 1$ 。这就意味着, 只要有一个系数由于量化产生很微小的误差, 就有可能使系数失去稳定。此外, 从式(9.46)可以看出, 反馈支路的阶次 N 越高, 使滤波器失去稳定的系数量化误差的绝对值就越小, 也就是说越容易使滤波器变得不稳定。

例 9.2 已知一个 3 阶 IIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.99z^{-1})^3} = \frac{1}{1 - 2.97z^{-1} + 2.9403z^{-2} - 0.970299z^{-3}}$$

为使滤波器保持稳定, 在对滤波器系数进行舍入量化时, 至少应当采用几位字长? 假设用直接型结构来实现该滤波器。

解 由给出的系统看出, 该滤波器在 $z=0.99$ 处有一个 3 阶极点, 且在 $z=1$ 附近。假设 $H(z)$ 的分母多项式的某一系数 a_i 的量化误差为 $|\Delta a_i|$, 当其绝对值达到式(9.46)规定的限度时, 滤波器的极点将移到 $z=1$ 处, 从而使滤波器不稳定。由式(9.46)可得

$$|\Delta a_i| = \left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i \right| = |1 - 2.97 + 2.9403 - 0.970299| = 10^{-6}$$

当系数用 b 位(不含符号位)定点二进制小数表示时, 舍入量化误差绝对值将不会大于 2^{-b-1} 。由于 $10^{-6} > 2^{-20}$, 所以若 b 选为 19, 则系数的舍入量化误差绝对值将不会超过 10^{-6} 或 2^{-20} , 从而保证极点不会移到单位圆上或圆外, 保持了滤波器工作的稳定。

例 9.3 若用 3 个相同的 1 阶 IIR 滤波器的级联来实现上例中的数字滤波器, 为了使该级联结构稳定, 求 1 阶节 IIR 滤波器的系数的量化字长。

解 根据上例给出的滤波器系统函数, 可以看出级联结构中的 1 阶节 IIR 滤波器的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.99z^{-1}}$$

每个 1 阶节的极点都是相同的。由式(9.46)得

$$|\Delta a_i| = |1 - 0.99| = 10^{-2} > 2^{-7}$$

由于为保持级联结构系统稳定, 只需要 3 个 1 阶节稳定, 由 $|\Delta a_i| > 2^{-7}$ 可看出, 只要用 6 位字长的二进制数来表示系数就够了。

从例 9.2 和例 9.3 可以得出一个结论, 就滤波器系数的量化误差对滤波器稳定性的影

响而言,级联结构比直接结构要轻微得多。

9.4.2 系数量化误差对系统零点和极点位置的影响

当系统的结构形式不同时,系统在系数的“量化宽度”值相同的情况下受系数量化影响的大小是不同的,这就是系统对系数量化的灵敏度。显然它是比较各种结构形式的重要标准。系数的量化影响到滤波器特性的变化,也即零、极点偏离了预定位置,因此可用一定的系数误差所造成的零、极点位置误差作为系统对系数量化灵敏度的度量。

设 a_i, b_i 是按直接型结构设计定下来的 IIR 系统函数表达式中的各个系数,如系数在实际实现时已被量化,即

$$\hat{a}_i = a_i + \Delta a_i, \quad \hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$$

其中 Δa_i 和 Δb_i 是由量化造成的系数误差,则实际实现的系统函数为

$$\hat{H}(z) = \sum_{i=0}^M \hat{b}_i z^{-i} / \left(1 - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i z^{-i} \right) \quad (9.47)$$

在直接型结构中,零点由 b_i 决定,极点由 a_i 决定。因为极点的变化会影响系统的稳定性,故必须讨论系数量化对极点的影响。假设 $H(z)$ 的极点位于 $z = z_k, k=1, 2, \dots, N$ 。系统函数的分母多项式为

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = \prod_{k=1}^N (1 - z_k z^{-1}) \quad (9.48)$$

另外,将 $\hat{H}(z)$ 的极点定义为 $z_k + \Delta z_k, k=1, 2, \dots, N$ 。则极点 z_k 的位置误差 Δz_k 与各系数误差 Δa_i 的关系为

$$\Delta z_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \Delta a_i, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9.49)$$

式(9.49)清楚地表明 $\partial z_k / \partial a_i$ 值的大小决定着系数 a_i 的偏差 Δa_i 对极点偏差 Δz_k 的影响程度, $\partial z_k / \partial a_i$ 越大, Δa_i 对 Δz_k 的影响也越大,反之亦然。 $\partial z_k / \partial a_i$ 就是极点 z_k 对系数 a_i 变化的灵敏度。可以根据多项式 $A(z)$ 来求这个极点位置灵敏度的表达式。根据复合函数的微分法则可得

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z_k} \right)_{z=z_k} \cdot \left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i} \right) = \left(\frac{\partial A(z)}{\partial a_i} \right)_{z=z_k}$$

所以

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = \frac{\partial A(z)}{\partial a_i} \bigg/ \frac{\partial A(z)}{\partial z_k} \bigg|_{z=z_k} \quad (9.50)$$

根据式(9.48)可求出

$$\frac{\partial A(z)}{\partial a_i} = -z^{-i} \quad (9.51)$$

根据式(9.48)的因式分解形式,(假定 z_k 全部是单根)可求得

$$\frac{\partial A(z)}{\partial z_k} = -z^{-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (1 - z_l z^{-1}) = -z^{-N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z - z_l) \quad (9.52)$$

将式(9.51)、式(9.52)代入式(9.50)则得到极点位置灵敏度为

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = \frac{z_k^{N-i}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z_k - z_l)} \quad (9.53)$$

上式就是第 k 个极点 z_k 对 $H(z)$ 分母多项式中第 i 个系数变化(误差)的灵敏度的度量。但它只对单阶极点有效,多阶极点亦可进行类似推导。对直接型结构来说,由于它的零点仅取决于分子多项式的系数 b_i ,和上面的推导相似,也可以得到零点对 b_i 误差的灵敏度的表达式。将式(9.53)代入到式(9.49)可以得到各 a_i 系数的误差引起的第 k 个极点位置的变化量,即

$$\Delta z_k = \sum_{i=1}^N \frac{z_k^{N-i}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z_k - z_l)} \Delta a_i, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

式(9.53)的分母中每一个因子 $(z_k - z_l)$ 是一个由极点 z_l 指向极点 z_k 的矢量,而整个分母正是所有极点指向该极点 z_k 的矢量积。这些矢量越长,即极点彼此间距离越远时,极点位置灵敏度就越低;这些矢量越短,即极点彼此越密集时,极点位置灵敏度就越高。例如如图 9.6(a)与图 9.6(b)所示的滤波器的极点分布,前者的极点间距离比后者长,因此前者的极点位置灵敏度比后者小,也即在相同程度的系数量化下所造成的极点位置误差,前者比后者就要小。

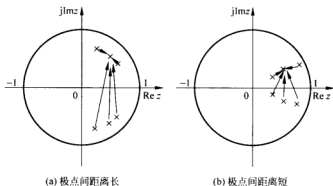


图 9.6 极点位置灵敏度与极点间距离的关系

高阶直接型结构滤波器极点数目多而密集,低阶直接型滤波器极点数目少而稀疏,因此高阶直接型滤波器极点位置将比低阶的对系数量化误差要敏感得多。同理,可认为并联结构及级联结构将比直接型结构要好得多。在级联和并联型结构中,每一对共轭复极点是单独用一个二阶子系统实现的,其他二阶子系统的系数变化对本节子系统的极点位置不产生任何影响。由于每对极点仅受两个相应系数的影响,每个子系统的极点密度比直接型高阶网络的要稀疏多了,因此极点位置受系数量化的影响比直接型结构要小得多。

下面用一个例题,通过极点位置灵敏度来说明极点位置变化与系数字长的关系。

例 9.4 设数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.373}{1 + 1.7z^{-1} + 0.745z^{-2}} = \frac{0.373}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

利用 a_2 变化造成的极点位置灵敏度,为保持极点在其正常值的 0.5% 范围内变化,试确定所需要的最小字长。

解 令 $H(z)$ 的分母为零,即

$$1 + 1.7z^{-1} + 0.745z^{-2} = 0$$

由此得出 $H(z)$ 的两个极点为

$$z_1 = -0.85 + j0.15, \quad z_2 = -0.85 - j0.15$$

则

$$|z_1| = |z_2| = 0.863$$

可直接利用式(9.53)得到 a_2 变化的影响,即

$$\frac{\partial z_1}{\partial a_2} = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{j0.3} = 3.3333e^{-j90^\circ}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial a_2} = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{-j0.3} = 3.3333e^{j90^\circ}$$

可以看出, a_2 的变化对 z_1 和 z_2 影响的大小是相同的。由于题意要求研究 a_2 对 z_2 (或 z_1) 的影响,故只需要考虑绝对值即可,因而有

$$|\Delta z_2| = \left| \frac{\partial z_2}{\partial a_2} \right| |\Delta a_2|$$

所以

$$|\Delta a_2| = \left| \frac{\Delta z_2}{\partial z_2 / \partial a_2} \right| = \frac{0.5\% \times |z_2|}{3.3333} = 1.295 \times 10^{-3}$$

这样,所需的系数“量化宽度”应为 $2|\Delta a_2| = 2.590 \times 10^{-3}$ 。如果采用定点二进制小数表示,设小数点后为 b 位,则分辨率为 2^{-b} ,因为应满足 $2^{-b} < 2.590 \times 10^{-3}$, b 取整数,可得 $b=9$ 。由此可见,系数字长 $b=9$ 才能满足性能要求。

总的说来,系数量化对极点位置的影响与极点本身状态以及滤波器的结构都有密切关系。对于高阶滤波器来说,应该避免采用直接型结构,而应采用分解为基本二阶节或一阶节的级联型结构或并联型结构。这样,在给定字长的情况下,可以使系数量化的影响最小。对于极点灵敏度很高的场合,采用双精度的系数,以便有效地达到精度的要求。

9.4.3 滤波器频率特性误差的估计

系数量化误差导致滤波器的零点和极点的位置发生变动,从而导致滤波器的频率特性产生误差。下面对频率特性误差的上界作出估计。

假设要求的频率特性是

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

其中 $h(n)$ 是滤波器的单位取样响应。现在用字长为 b 位 (不含符号位) 的定点小数表示滤波器的系数,采用舍入量化,量化后的系数为

$$\hat{h}(n) = h(n) + e(n)$$

式中, $e(n)$ 是舍入量化误差, $|e(n)| \leq q/2$, 这里 q 是量化间隔, $q = 2^{-b}$ 。因而,实际上实现的滤波器的频率特性是

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(n)z^{-n} = H_0(z) + \sum_{n=0}^{N-1} e(n)z^{-n}$$

系数量化误差所引起的频率特性误差为

$$\Delta H(z) = H_0(z) - H(z) = - \sum_{n=0}^{N-1} e(n)z^{-n}$$

由上式得到

$$|\Delta H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} e(n)e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |e(n)| \leq \frac{N}{2}q$$

以上讨论了 FIR 滤波器的情况。对于 IIR 滤波器来说,由于各系数与频率特性之间存在着非线性关系,因而情况要复杂得多。不过,虽然不能用上述方法来分析 IIR 滤波器,但用计算机计算频率特性误差并非困难的事情。

9.5 数字滤波器运算中的有限字长效应

实现数字滤波器所包含的基本运算有延时、乘系数和相加三种。因为延时并不造成字长的变化,所以只需讨论乘系数和相加运算造成的影响。在定点制运算中,相乘的结果尾数位数会增加。例如两个 b 位尾数的数相乘后尾数是 $2b$ 位,必须被舍入或截尾成 b 位尾数;相加的结果,尾数字长不变,不必舍入或截尾,但相加的结果可能超出有限寄存器长度,产生溢出,故有动态范围问题。浮点制运算中,相加及相乘都可能使尾数位数增加,故都会有舍入或截尾,但动态范围则不成问题。

分析数字滤波器运算误差的目的,是为了选择滤波器运算位数(即寄存器长度),以便满足信号噪声比值的技术要求。

前面已分析到,舍入或截尾的处理是非线性过程,分析起来非常麻烦,精确计算不仅不大可能,也没有必要,因而可以采用前面提出的统计方法,得到舍入或截尾的平均效果即可。下面以 IIR 滤波器为例,讨论运算中的有限字长效应。

9.5.1 IIR 滤波器定点运算舍入误差的统计分析

相乘运算 $y(n) = ax(n)$ 如图 9.7(a) 所示。在定点制中,每次相乘运算之后都要作一次舍入或截尾处理,因此会引入非线性,一般多采用舍入处理,如图 9.7(b) 所示。采用统计分析方法,可以将舍入误差

$$e(n) = Q_R[ax(n)] - ax(n) = Q_R[y(n)] - y(n) \quad (9.54)$$

作为独立噪声叠加到信号上($Q_R[\cdot]$ 表示舍入处理)。这样仍可用线性流程图来表示,如图 9.7(c) 所示。

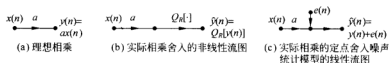


图 9.7 定点制相乘运算的模型

采用图 9.7(c) 的统计模型, 在分析数字滤波器由于乘法舍入的影响时, 需对实现滤波器所出现的各种噪声源作以下假定:

- (1) 所有误差 $e(n)$ 是平稳的白噪声序列 (均值为零);
- (2) 每个误差在它的量化范围内都是均匀分布的;
- (3) 任何两个不同乘法器形成的噪声源互不相关;
- (4) 误差 $e(n)$ 与输入 $x(n)$ 及中间计算结果不相关, 从而和输出序列 $y(n)$ 也不相关。

当信号波形越复杂, 量化步距越小时, 这些假定越接近实际。根据这些假定, 可认为舍入噪声是在 $[-\frac{2^{-b}}{2}, +\frac{2^{-b}}{2}]$ 范围内均匀分布的, 因而均值 $m_e = E[e(n)] = 0$, 方差 $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = \frac{\Delta^2}{12}$, $\Delta = 2^{-b}$ 。

这样, 可以按照统计模型, 即按线性系统的原则来求各噪声 $e(n)$ 所产生的总输出噪声 $e_f(n)$ 。设 $y(n)$ 是理想的没作尾数处理的输出, 则经定点舍入处理后的实际输出为

$$\tilde{y}(n) = y(n) + e_f(n) \quad (9.55)$$

而每一个噪声源 $e(n)$ 所造成的输出噪声, 可以利用白噪声通过线性系统的结论公式分别求出 $e(n)$ 所造成的输出噪声的方差及均值, 即

$$\sigma_{f_i}^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi j} \oint_c H_e(z) H_e(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n) \quad (9.56)$$

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e(n) \quad (9.57)$$

其中 $h_e(n)$ 是从 $e(n)$ 加入的节点到输出节点间的系统的单位取样响应, $H_e(z)$ 是 $h_e(n)$ 的 Z 变换。由于可以作线性系统处理, 因此最后将所有的输出噪声线性叠加就得到总的输出噪声 $e_f(n)$ 。按照前面的 4 项假定, 则总的输出噪声的方差也等于每个输出噪声方差之和。

例 9.5 有一个 IIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.2}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}$$

用定点制算法, 尾数舍入, 分别计算直接型、级联型及并联型三种结构的舍入误差。

解 (1) 直接型结构

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.2}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})} \\ &= \frac{0.2}{1 - 1.3z^{-1} + 0.42z^{-2}} = \frac{0.2}{A(z)} \end{aligned}$$

其中

$$A(z) = (1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})$$

图 9.8 画出了直接型结构定点相乘舍入后的统计模型, 三个系数相乘, 有三个舍入噪声 $e_0(n) + e_1(n) + e_2(n)$,

它只通过 $H_0(z) = \frac{1}{A(z)}$ 网络, 而不是 $H(z) = \frac{0.2}{A(z)}$ 。

所以

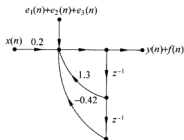


图 9.8 例 9.2 的直接型结构舍入误差统计模型

$$f(n) = [e_0(n) + e_1(n) + e_2(n)] * h_0(n)$$

而

$$h_0(n) = z^{-1}[H_0(z)]$$

输出噪声方差为

$$\sigma_f^2 = 3\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

先计算

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{(1-0.7z^{-1})(1-0.6z^{-1})(1-0.7z)(1-0.6z)} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

围线 c 为单位圆, 围线内只有两个极点 $z=0.6, z=0.7$, 求两个极点的留数, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z}{(z-0.7)(z-0.6)(1-0.7z)(1-0.6z)} dz \\ &= \sum_k (\text{被积函数在单位圆内极点 } z_k \text{ 上的留数}) \\ &= \frac{0.7}{0.1 \times (1-0.49)(1-0.42)} + \frac{0.6}{(-0.1) \times (1-0.42)(1-0.36)} \\ &= 23.6646 - 16.1638 = 7.5008 \end{aligned}$$

所以

$$\sigma_f^2 = 3\sigma_e^2 \times 7.5008 = 3 \times \frac{\Delta^2}{12} \times 7.5008 = 1.8752\Delta^2 (\Delta = 2^{-4})$$

(2) 级联型结构

$$\begin{aligned} H(z) &= 0.2 \times \frac{1}{(1-0.7z^{-1})(1-0.6z^{-1})} = 0.2 \times \frac{1}{A_1(z)} \times \frac{1}{A_2(z)} = 0.2 \times \frac{1}{A(z)} \\ &= 0.2 \times H_0(z) \end{aligned}$$

其中

$$A_1(z) = 1 - 0.7z^{-1}, \quad A_2(z) = 1 - 0.6z^{-1}$$

图 9.9 画出了级联型结构定点相乘舍入后的统计模型, 每一次相乘相应节点上引入一个舍入噪声。要注意, 噪声经过的网络是不同的。

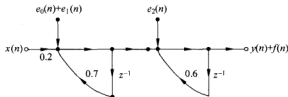


图 9.9 例 9.2 的级联结构舍入误差统计模型

$$f(n) = [e_0(n) + e_1(n)] * h_0(n) + e_2(n) * h_2(n)$$

$$h_0(n) = Z^{-1} \left[\frac{1}{A(z)} \right], \quad h_2(n) = Z^{-1} \left[\frac{1}{A_2(z)} \right]$$

所以

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A_1(z)A_2(z)A_1(z^{-1})A_2(z^{-1})} \frac{dz}{z} \\ + \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A_2(z)A_2(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

所以

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(1-0.7z^{-1})(1-0.6z^{-1})(1-0.7z)(1-0.6z)z} + \\ \sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)z} \\ = 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z dz}{(z-0.7)(z-0.6)(1-0.7z)(1-0.6z)} + \\ \sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(z-0.6)(1-0.6z)} \\ = 2\sigma_e^2 \left[\frac{0.7}{0.1 \times (1-0.49)(1-0.42)} + \frac{0.6}{(-0.1) \times (1-0.42)(1-0.36)} \right] + \\ \sigma_e^2 \frac{1}{1-0.36} \\ = 16.5641\sigma_e^2 = 16.5641 \times \frac{\Delta^2}{12} = 1.3803\Delta^2$$

(3) 并联型结构

$$H(z) = \frac{1.4}{1-0.7z^{-1}} + \frac{-1.2}{1-0.6z^{-1}}$$

图 9.10 画出了并联型结构定点相乘舍入后的统计模型, 有 4 个相乘系数, 故有 4 个相乘舍入噪声。由图 9.10 看出

$$e_0(n) + e_1(n) \text{ 只通过 } \frac{1}{A_1(z)} = \frac{1}{1-0.7z^{-1}}$$

$$e_2(n) + e_3(n) \text{ 只通过 } \frac{1}{A_2(z)} = \frac{1}{1-0.6z^{-1}}$$

因此输出 $f(n)$ 的方差为

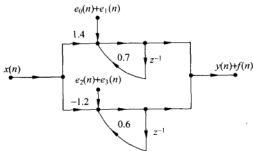


图 9.10 例 9.2 的并联结构的舍入误差统计模型

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A_1(z)A_1(z^{-1})} \frac{dz}{z} + 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{A_2(z)A_2(z^{-1})} \frac{dz}{z} \\
&= 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(z-0.7)(1-0.7z)} + 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(z-0.6)(1-0.6z)z} \\
&= 2\sigma_e^2 \cdot \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(z-0.7)(1-0.7z)} + \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{dz}{(z-0.6)(1-0.6z)} \right] \\
&= 2\sigma_e^2 \left[\frac{1}{1-0.49} + \frac{1}{1-0.36} \right] \\
&= 7.0466\sigma_e^2 = 7.0466 \times \frac{\Delta^2}{12} = 0.5872\Delta^2
\end{aligned}$$

由此看出

$$\sigma_f^2 \text{直接} > \sigma_f^2 \text{级联} > \sigma_f^2 \text{并联}$$

直接型结构的所有舍入误差都要经过全部网络的反馈环节,误差积累起来了,所以误差最大。级联型结构的每个舍入误差只通过其后面的反馈环节(不通过前面的),故舍入误差比直接型的小(在某些排序情况下,其误差性能可接近甚至超过并联型结构)。并联型结构的每个并联网络的舍入误差只通过本网络,与其他网络无关,误差累积作用更小,故在一般情况下,其输出误差最小。

9.5.2 IIR 滤波器定点运算的动态范围

定点制的加法运算不会出现尾数字长增加,故不会有舍入误差问题,但它却可能出现溢出。上面讨论的舍入噪声只有在系统不溢出时才是输出误差的主要来源,当溢出时,溢出会产生很大的误差。为了防止溢出,需要在网络内加入适当的压缩比例因子。要保证每一个加法器的输出都不溢出,推而广之就是要滤波器每一个节点上都不产生溢出,也就是使每一节点信号的值都小于 1。

令 $y_k(n)$ 表示第 k 个节点上的输出,对定点制要满足

$$|y_k(n)| < 1 \quad (9.58)$$

用 $h_k(n)$ 表示从滤波器输入到第 k 个节点的单位取样响应,则有

$$y_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) = h_k(n) * x(n)$$

$y_k(n)$ 的动态范围取决于输入信号类型及 $h_k(n)$, 对于不同类信号, $y_k(n)$ 的动态范围如表 9.3 所示。

表 9.3 输入 $x(n)$ 为不同类信号时 $y_k(n) = x(n) * h_k(n)$ 的动态范围

输入 $x(n)$	$y_k(n)$ 的动态范围
1. 余弦 $x(n) = \cos(\omega n)$	$ y_k(n) = \max H_k(e^{j\omega}) $
2. 有界信号 $ x(n) \leq 1$	$ y_k(n) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k(n) $
3. 有限能量信号 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(m) \leq 1$	$ y_k(n) \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k^2(n) \right]^{1/2}$

续表

输入 $x(n)$	$y_k(n)$ 的动态范围
4. 广义平稳信号	$\{E[y_k^2(n)]\}^{1/2} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_{xx}(\omega) H_k(e^{j\omega}) ^2 d\omega \right]^{1/2}$
5. 白色信号 $s_{xx}(\omega) = 1$	$\{E[y_k^2(n)]\}^{1/2} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m) ^2 \right]^{1/2}$

注: $s_{xx}(\omega)$ 为广义平稳随机信号的功率谱密度, $H_k(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[h_k(n)]$ 在表中前三种情况下给出 $y_k(n)$ 的真正上限, 后两种情况则只给出随机变量的标准偏差, 而不是真正的上限, 因而仍可能存在溢出。

下面来分析使任一节点 k 不发生溢出的条件。由于

$$|y_k(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) \right| \leq x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|$$

其中, x_{\max} 表示输入序列最大绝对值。要求

$$|y_k(n)| < 1 \quad k = 0, 1, \dots$$

即

$$x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)| < 1 \quad (9.59)$$

也就是要求

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|} \quad (9.60)$$

这就是保证第 k 个节点上不出现溢出时最大输入值上限。

但是 x_{\max} 不一定满足式(9.60)的要求, 为此可将输入信号乘上一个适当的压缩比例因子 A ($A < 1$), 以衰减输入信号的幅度, 从而使得任意第 k 个节点不发生溢出, 即

$$y_k(n) = Ax_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)| < 1 \quad (9.61)$$

则

$$A < \frac{1}{x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|} \quad (9.62)$$

9.5.3 IIR 滤波器定点运算的零输入极限环振荡和溢出振荡

数字滤波器中由于运算过程中的尾数处理产生量化的非线性作用, 因而使系统中引入了非线性环节, 而 IIR 滤波器又存在着反馈, 因而在一定的条件下, 也可以引起振荡。一个稳定的数字滤波器, 在某时刻令输入为零, 则从该时刻开始输出应逐渐衰减到零。但是同一滤波器, 若用有限寄存器长度来实现, 则在输入为零的时刻开始, 输出并不逐渐衰减为零, 有可能衰减到某一非零的幅度范围, 产生振荡特性(包括 $\omega = 0$ 的等幅序列), 这种效应称为零输入极限环振荡。

数字滤波器的极限环特性很复杂, 也很难分析, 下面仅就一阶 IIR 数字滤波器的简单情

况加以讨论。

1. 定点运算有限寄存器长度引起的零输入极限环振荡

设一阶 IIR 网络的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (9.63)$$

在无限精度运算下,其差分方程为

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad (9.64)$$

在定点制中,每次乘法运算后都要对尾数进行舍入处理,舍入处理是非线性的,这时的非线性方程可表示为

$$\hat{y}(n) = Q_k[a \hat{y}(n-1)] + x(n) \quad (9.65)$$

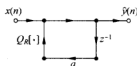


图 9.11 一阶 IIR 网络的非线性流程图

$Q_k[\cdot]$ 表示舍入量化处理。此式可用图 9.11 的非线性流程图来表示。

下面看一个实际例子。设此一阶系统中尾数字长为 $b=3$ 位(不包括符号位),系数 $a=0.5$ 用二进制表示为 $a=0.100$,系统的极点 $z=a=0.5 < 1$ 在单位圆内,故系统稳定,系统的单位取样响应为 $h(n)=a^n u(n)$ 。如果输出序列由 0.75 降到零,即

(以二进制数表示)

$$x(n) = \begin{cases} 0.110 & n=0 \\ 0.000 & n>0 \end{cases} \quad \text{即 } x(n) = 0.75\delta(n)$$

在无限精度运算下,输出 $y(n)$ 也将逐渐衰减到零,即

$$y(n) = x(n) * h(n) = 0.75a^n u(n) = 0.75 \times (0.5)^n u(n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

如果对运算结果进行尾数处理,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,输出就不趋于零了。将以上的式(9.65)的非线性方程的一步一步运算结果列表如表 9.4 所示。

表 9.4 $a=0.100$ (二进制)的一阶网络运算过程

n	x(n)	$\hat{y}(n-1)$	$a \hat{y}(n-1)$	$Q_k[a \hat{y}(n-1)]$	$\hat{y}(n)$	
					二进制	十进制
0	0.110	0.000	0.000	0.000	0.110	0.75
1	0.000	0.110	0.0110	0.011	0.011	0.375
2	0.000	0.011	0.0011	0.010	0.010	0.25
3	0.000	0.010	0.0010	0.001	0.001	0.125
4	0.000	0.001	0.0001	0.001	0.001	0.125
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

可以看出,最后输出停留在 $\hat{y}(n)=0.001$ (二进制)上,不会衰减到零。进入 $\hat{y}(n)=0.001$ (二进制)后被称为“死带”区域,其结果如图 9.12(a)所示。如果 a 为负数,则每乘一次 a ,输出改变一次符号,则输出是正负值相同的不衰减振荡。例如,当 $a=-0.5$ (十进制),则每乘一次 a 就改变一次符号,就得到如图 9.12(b)所示的 $\hat{y}(n)$ 。这两种现象就是“零输入极限环振荡”。

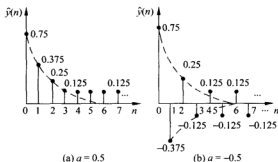


图 9.12 一阶 IIR 网络的零输入极限环振荡

这种现象产生的原因是什么呢? 观察表 9.4 的最后一行可以看出, 当 $\hat{y}(n-1)=0.001$ 时, $a\hat{y}(n-1)=0.00010$, 数值被衰减了, 但经过舍入处理后, $Q_R[a\hat{y}(n-1)]=0.001$, 又变成原来 $\hat{y}(n-1)$ 的数值, 因而输出就保持不变, 也就是说, 只要满足

$$|Q_R[a\hat{y}(n-1)]| = |\hat{y}(n-1)| \quad (9.66)$$

时, 舍入处理就使系数 a 失效, 也就是等效于使 a 换成绝对值为 1 的系数 a' , $a' = a/|a|$, 这时一阶滤波器的极点变成 $a' = \pm 1$, 代入式 (9.66), 可得等效系统函数为

$$H'(z) = \frac{1}{1 - a'z^{-1}} = \frac{1}{1 \pm z^{-1}} \quad (9.67)$$

如图 9.13 所示, 当 $a=a_1=0.5$ 时, 等效 $H'(z)$ 的极点在 $z=1$ 处, 当 $a=a_2=-0.5$ 时, 等效 $H'(z)$ 的极点在 $z=-1$ 处, 也就是极点都迁移到单位圆上, 因而系统就是临界稳定的, 出现等幅振荡。 $a=0.5$ 时的极点迁移到零频位置 $z=a'=1$ 处, 故所产生的死带称为零频极限环振荡。

下面讨论极限环振荡幅度与字长 b 的关系。由于舍入误差的范围为 $\Delta/2$ 以内, 故有

$$|Q_R[a\hat{y}(n-1)] - a\hat{y}(n-1)| \leq \frac{\Delta}{2} \quad (9.68)$$

或

$$|Q_R[a\hat{y}(n-1)]| - |a| |\hat{y}(n-1)| \leq \frac{\Delta}{2}$$

将极限环振荡时的式 (9.66) 代入此式, 可得

$$|\hat{y}(n-1)| - |a| |\hat{y}(n-1)| \leq \frac{\Delta}{2}$$

则可得

$$|\hat{y}(n-1)| \leq \frac{\Delta/2}{1 - |a|} \quad (9.69)$$

此式定义了一阶 IIR 网络的死带范围, 表明极限环幅度与量化宽度成正比, 因此增加字长 (减小量化宽度) 将使极限环振荡减弱。例如, 设 $b=3$, $\Delta=2^{-b}=1/8$, $|a|=0.5$ 时, 有

$$|\hat{y}(n)| = |\hat{y}(n-1)| = \frac{1/16}{1 - 0.5} = \frac{1}{8} = 0.125$$

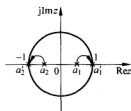


图 9.13 舍入后极点的等效迁移

这与表 9.4 的结果一致。

用同样的方法可分析二阶系统的零输入极限环振荡现象。

当采用高阶 IIR 滤波器时,极限环振荡的分析更为复杂。如果采用并联形式来实现高阶系统,由于每个并联节的输出是独立的,故可分别直接应用上面的分析。用级联形式实现高阶系统,只有第一节输入为零,后续节可呈现出自己的极限环振荡且过滤前节的极限环振荡输出。

在实际问题中,要尽量克服极限环振荡现象,例如在通信中,空载线路就不允许有振荡存在,但是利用极限环振荡现象,可以设计周期性信号发生器。

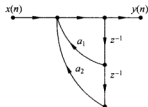


图 9.14 二阶 IIR 滤波器

2. 定点运算的溢出振荡

在上面的讨论中,都假定已经选择合适的比例因子,使相加结果不出现溢出。如果在 IIR 滤波器的定点加法运算中存在溢出,则在一定条件下会引起振荡,称为溢出振荡。下面以定点补码运算的二阶 IIR 滤波器为例进行讨论,滤波器结构如图 9.14 所示。

此二阶滤波器的差分方程为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \quad (9.70)$$

其系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a_1 z - a_2} = \frac{z^2}{(z - b_1)(z - b_2)} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - (b_1 + b_2)z + b_1 b_2} \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$b_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \quad (9.72)$$

首先讨论稳定问题。稳定条件是 $H(z)$ 的极点 b_1, b_2 在单位圆内,即 $|b_1| < 1, |b_2| < 1$,又由式(9.71)可知 $b_1 + b_2 = a_1, b_1 b_2 = -a_2$,由于 $|b_1 b_2| < 1$,故 $|a_2| < 1$ 。下面分两种情况进行讨论。

① 设 b_1, b_2 为实根,则

$$(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) > 0$$

即

$$1 + b_1^2 b_2^2 > b_1^2 + b_2^2$$

因而

$$(1 + b_1 b_2)^2 > (b_1 + b_2)^2$$

由于 a_1, a_2 为实数,将 b_1, b_2 与 a_1, a_2 的关系代入,则

$$(1 - a_2)^2 > a_1^2, \quad \text{即 } 1 - a_2 > |a_1|, \quad \text{即 } |a_1| + a_2 < 1 \quad (9.73)$$

此外,若 b_1, b_2 为实根,则由式(9.72)必有

$$a_1^2 + 4a_2 \geq 0 \quad (9.74)$$

可得以下两种情况:

当 $a_2 > 0$ 时,式(9.74)一定成立;

当 $a_2 < 0$ 时,要求

$$a_2 \geq -\frac{a_1^2}{4} \quad (9.75)$$

才能使式(9.74)成立。

将式(9.73)与式(9.75)综合,可得 b_1, b_2 为实根时系统稳定的条件为

$$|a_1| + a_2 < 1, \quad a_2 \geq -\frac{a_1^2}{4} \quad (9.76)$$

这就是图 9.15 中横线阴影区的内部及 $a_2 = -\frac{a_1^2}{4}$ 的边界上。

② 设 b_1, b_2 为共轭复根 $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$, $r < 1$, 则有

$$|z_1 z_2| = r^2 = -a_2 < 1, \quad \text{即 } a_2 > -1 \quad (9.77)$$

此外,则由式(9.72)必有

$$a_1^2 + 4a_2 < 0 \quad (9.78)$$

将式(9.77)和式(9.78)综合,可得 b_1, b_2 为共轭复根时系统稳定的条件为

$$a_2 > -1, \quad a_2 < -\frac{a_1^2}{4} \quad (9.79)$$

这就是图 9.15 中竖线的阴影区内部(不包括边界)。

这样,将①、②两种情况归纳可知,系统稳定必须在 $|a_1| + a_2 = 1$ (即 $a_2 + a_1 = 1$ 直线和 $a_2 - a_1 = 1$ 直线)以及 $a_2 = -1$ 这三条直线方程所围的三角形之内,包括横线阴影区及竖线阴影区,如图 9.15 所示。

其次讨论不溢出问题。当输入 $x(n)=0$ 后, a_1, a_2 为何值时才能保证不溢出呢? 仍利用补码加法器,并暂时忽略舍入误差。补码加法器的非线性特性如图 9.16 所示。其中 v 是该加法器输入之和,而 $f[\]$ 是加法器的输出,也就是滤波器的输出,如图 9.16 所示,只有当各输入之和处于 $|v| < 1$ 的数值范围之内时加法器才相当于真正的加法运算。当 v 的值在 1 与 2 之间时,相加后正的输出将被理解为负的分数输出,这时就出现严重的非线性。当输入 $x(n)=0$ 时,则二阶滤波器的输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

经补码加法器后,其真实输出应满足图 9.16 的非线性变换关系

$$y(n) = f[a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)]$$

不出现溢出,要求 $|y(n)| < 1$ 对所有 n 都成立,即要求 $|y(n)| < 1, |y(n-1)| < 1, |y(n-2)| < 1$ 。

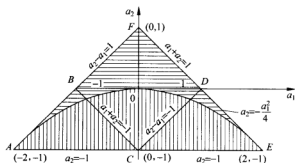


图 9.15 二阶 IIR 系统的稳定性三角形

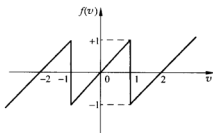


图 9.16 补码加法器的输入输出特性

由图 9.16 可知,只要输入之和满足

$$|a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)| < 1$$

则 $y(n)$ 会被正确理解,即 $|y(n)| < 1$ 。

假定 $|y(n-1)| < 1, |y(n-2)| < 1$, 如果

$$|a_1| + |a_2| \leq 1 \quad (9.80)$$

则有

$$|a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)| \leq |a_1 y(n-1)| + |a_2 y(n-2)| < |a_1| + |a_2| \leq 1$$

所以 $|a_1| + |a_2| \leq 1$ 是不溢出 ($|y(n)| < 1$) 的充分条件。同样,用反证法可证明 $|a_1| + |a_2| \leq 1$ 也是不溢出的必要条件。

式(9.80)就是图 9.15 中 $a_1 + a_2 = 1, a_2 - a_1 = 1, a_1 + a_2 = -1, a_2 - a_1 = -1$ 四条直线所围的正方形。

最后讨论输出极限环振荡问题。分以下两种情况:

(1) 输入 $x(n) = 0$ 时, 输出一个等幅序列 $y(n) = y_0 > 0$ 的可能性, 即

$$y_0 = f[a_1 y_0 + a_2 y_0] = 2K + a_1 y_0 + a_2 y_0, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

选为 $2K$, 是考虑到图 9.16 的特性, 输入相差偶数时, 输出相同。一定能找到一个 K 值, 使上式相等, 即

$$y_0 = \frac{2K}{1 - (a_1 + a_2)}$$

注意, 由于 $f[\cdot] < 1$, 故要求 $y_0 < 1$ 。

在没有溢出时, 若 $K = 0$, 则 $y_0 = (a_1 + a_2)y_0$, 故只要 $a_1 + a_2 = 1$ 即可, 但这一直线不在稳定区域内。

如果 $K = \pm 1$, 则 $y_0 = \frac{\pm 2}{1 - (a_1 + a_2)}$, 要求 $|y_0| = \frac{2}{1 - (a_1 + a_2)} < 1$, 即必须

$$a_1 + a_2 < -1 \quad (9.81)$$

从而得到输入为零时输出为等幅振荡序列, 这正好是图 9.15 的左下角的 $\triangle ABC$ 内部区域。因为 BC 边 $a_1 + a_2 = -1$, 故 $y_0 = 1$; 顶点 A 上为 $a_1 + a_2 = -3$, 故 $y_0 = 1/2$ 。由此看出, 在 $\triangle ABC$ 内有 $1/2 < y_0 < 1$ 。当 $k \geq 2$ 时, a_1, a_2 不可能在稳定区域内。

(2) 输入 $x(n) = 0$ 时, 输出是周期为 2 的零输入极限环振荡, 即输出为 $y(n) = (-1)^n y_0$ 的情况, 其中 $0 < y_0 < 1$, 由补码加法器的非线性特性可得

$$(-1)^n y_0 = f[a_1 (-1)^{n-1} y_0 + a_2 (-1)^{n-2} y_0] = f[(-1)^n (a_2 - a_1) y_0]$$

同样有

$$(-1)^n y_0 = (-1)^n (a_2 - a_1) y_0 + 2K, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

可解得

$$(-1)^n y_0 = \frac{2K}{1 - (a_2 - a_1)} = \frac{2K}{1 + (a_1 - a_2)}$$

如果 $K = 0$, 则 $a_2 - a_1 = 1$, 不在稳定区域内。如果 $K = \pm 1$, 则上式变成 $(-1)^n y_0 = \frac{\pm 2}{1 + (a_1 - a_2)}$, 要求 $|y_0| < 1$, 则有

$$a_1 - a_2 > 1 \quad (9.82)$$

在此条件下, 才能满足 $x(n) = 0$ 时, 输出是周期为 2 的等幅振荡, 这一条件限定的区域为

图 9.15 的右下角的 $\triangle CDE$ 的内部区域。其一条边界为 $a_1 - a_2 = 1$, 则 $y_0 = 1$; 而顶点 E 处, $a_1 - a_2 = 3, y_0 = 1/2$ 。于是在 $\triangle CDE$ 内有 $1/2 < y_0 < 1$ 。 $k \geq 2$ 时, a_1, a_2 皆不在稳定区内。

综上所述, 若采用补码加法器, 则必须满足 $|a_1| + |a_2| < 1$ (即在图 9.15 中 $FBCD$ 方形的内部(不包括边界), 才能既稳定, 又不产生溢出。否则在没有输入时可能出现振荡。

为了避免溢出振荡, 必须修改加法器, 使非线性函数 $f[\cdot]$ 由图 9.16 的形式变成图 9.17 的形式, 也就是变成饱和加法器, 当相加器的输入之和大于 1 或小于 -1 时, 就分别以 1 和 -1 代表相加结果, 这样就能克服溢出振荡。

当然, 若用正常的不饱和加法器, 采用补码运算, 在两个或多个输入值相加时, 只要肯定最后结果的绝对值一定小于 1, 则相加的中间结果的溢出不会影响最后结果的正确性。这是因为, 例如补码二进制数表示法可用图 9.18 来表示, 溢出虽然产生暂时的错误, 但得到的数仍在 $b+1$ 位字的动态范围之内。

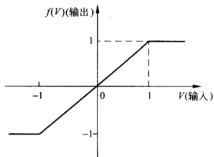


图 9.17 补码饱和加法器特性

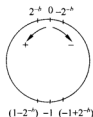


图 9.18 补码运算的表示

例 9.6 补码加法 $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

可表示为

$$\frac{3}{8} = 0.011, \quad \frac{3}{4} = 0.110, \quad \frac{1}{8} = 0.001, \quad -\frac{1}{2} = 1.100$$

则 $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 0.011 + 0.110 = 1.001 = -\frac{7}{8}$ (溢出, 产生错误)

继续相加 $-\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1.001 + 0.001 = 1.010 = -\frac{3}{4}$

再继续相加 $-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.010 + 1.100 = 10.110$

这是最后的结果, 把进位项(最高位)1 丢掉, 则为 $0.110 = 3/4$, 这正是所需的正确答案。因此, 暂时的溢出是允许的。

习 题

9.1 用 7 位字长(不含符号位)定点小数表示数值, 求截尾误差和舍入误差的取值范围。设在误差取值范围内, 截尾误差和舍入误差都是均匀分布(等概率分布)的, 画出误差的

概率密度函数曲线。

9.2 用7位字长(不含符号位)二进制数表示浮点数的尾数,求截尾相对误差和舍入相对误差的取值范围。设在误差取值范围内,误差幅度的概率分布是均匀的,画出误差的概率密度函数曲线。

9.3 设数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.017\ 221\ 333z^{-1}}{1 - 1.7\ 235\ 682z^{-1} + 0.74\ 081\ 822z^{-2}}$$

现用8位字长的寄存器来存放其系数,试求此时该滤波器的实际 $\hat{H}(z)$ 表达式。

9.4 A/D变换器的字长为 b ,其输出端接一网络,网络的单位取样响应为

$$h(n) = [a^n + (-a)^n]u(n)$$

试求网络输出的A/D量化噪声方差 σ_f^2 。

9.5 A/D变换器的字长为 b ,其输出端接一网络,系统函数 $H(z) = \frac{z}{z-A}$,式中 $|A| < 1$ 。

试求网络输出的A/D量化噪声方差 σ_f^2 。

9.6 一个二阶IIR滤波器的差分方程为

$$y(n) = y(n-1) - ay(n-2) + x(n)$$

现采用 $b=3$ 位的定点制运算,采用舍入处理。

(1) 当系数 $a=0.75$,零输入 $x(n)=0$,初始条件为 $\hat{y}(-2)=0, \hat{y}(-1)=0.5$ 。求 $0 \leq n \leq 9$ 的10点输出 $\hat{y}(n)$ 值;

(2) 证明当 $Q_R[a\hat{y}(n-2)] = \hat{y}(n-2)$ 时发生零输入极限环振荡,并用等效极点迁移来解释这一现象。

9.7 有一数字滤波器满足差分方程

$$y(n) = 0.25y(n-1) + x(n)$$

其中,输入信号 $x(n)$ 为 $x(n)=0.5u(n)$ 。

(1) 求滤波器输出 $y(n)$;

(2) 若输入信号 $x(n)$ 和系数0.25都用4位字长(不含符号位)的二进制原码表示(采用截尾处理),求滤波器的输出 $\hat{y}(n)$ 。

9.8 有一数字滤波器满足差分方程

$$y(n) = 0.25y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

其中,输入信号 $x(n)$ 为 $x(n) = \frac{1}{2}(-1)^n u(n)$ 。

(1) 求滤波器的理想输出 $y(n)$;

(2) 若用4位字长(不含符号位)的二进制原码、截尾量化处理来实现该滤波器,求滤波器的实际输出 $\hat{y}(n)$ 。

9.9 两个一阶IIR网络

$$H_1(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{1}{1-0.1z^{-1}}$$

用定点制运算,舍入处理,要求输出精度 $\sigma_f^2/\sigma_x^2 \approx -80\text{dB}$,问各需几位尾数字长。

9.10 已知一数字滤波器满足差分方程

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

设信号和系数都用有限字长原码表示,定点乘法运算后用截尾处理限制字长。试证:若滤波器稳定就不存在零输入极限环振荡现象,反之,若存在极限环振荡现象,则滤波器一定是不稳定的。

9.11 已知一数字滤波器满足差分方程

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

设信号和系数都用有限字长补码表示,定点乘法运算后用截尾处理限制字长。试证:若滤波器稳定,则不可能出现正负交替振荡的极限环振荡现象,但却可能出现零频率、负振幅的极限环振荡现象。

9.12 已知一数字滤波器的差分方程为

$$y(n+1) = -0.75y(n) + x(n)$$

其中输入信号 $x(n)$ 为

$$x(n) = (-1)^n u(n)$$

(1) 求理想的输出响应 $y(n)$;

(2) 设 $y(0)=1$, 求理想的零输入响应;

(3) 用 4 位字长(不含符号位)定点运算、舍入量化处理实现该滤波器, 设 $y(0)=1$, 求滤波器的零输入响应, 并与(2)的结果进行比较。

9.13 将题 9.12 中的滤波器系数 -0.75 改成 0.7 , 字长改成 8 位, 重做上题。

9.14 已知数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

采用原码、浮点运算, 浮点数尾数字长为 3 位(不含符号位)。设输入信号 $x(n)$ 是均值为零的白噪声序列, 求滤波器的输出噪声比。

9.15 已知滤波器传输函数为

$$H(z) = \frac{0.4}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

采用 b 位字长(不含符号位)定点小数、舍入量化处理来实现。设输入信号是均值为零、方差为 σ_e^2 的白噪声平稳随机信号, 求直接型结构、并联型结构和级联型结构的输出噪声比。

9.16 设数字滤波器为

$$H(z) = \frac{0.06}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}} = \frac{0.06}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

利用 a_1, a_2 变化造成的极点位置灵敏度, a_1, a_2 分别造成极点在正常值的 $0.2\% \sim 0.3\%$ 范围内变化, 试确定所需的最小字长。

附录 A

Matlab的使用

Matlab 是美国 MathWorks 公司推出的一种高性能的数值计算和可视化软件,它以矩阵为基本数据结构,交互式地处理计算数据,具有强大的计算、仿真及绘图等功能,是目前世界上应用广泛的工程计算软件之一。Matlab 把数值计算和可视化环境集成到一起,用户在命令窗口每输入一条命令并回车,Matlab 系统便解释执行,并直接显示执行结果。

Matlab 由主软件包和可扩充的工具箱组成,提供了大量的函数。由于 Matlab 使用简单、非常直观及工具箱扩充方便,使其受到各领域专家的关注,Matlab 的工具箱越来越多,应用范围也越来越广泛。其中,信号处理工具箱提供的函数基本涵盖了数字信号处理基础中算法的软件实现。另外,Matlab 的工具箱及图形显示(打印)功能也方便用户直观地进行分析、计算和设计工作,大大节省用户时间。目前,Matlab 已用于数字信号处理课程的问题分析、实验、滤波器设计及计算机模拟。本书附录 A 简要介绍 Matlab 的使用,附录 B 给出数字信号处理中常用的 Matlab 函数。

1. 启动 Matlab

启动 Matlab 系统后,自动弹出 Matlab 命令窗口。该窗口用于运行 Matlab 函数、命令及程序,是用户与 Matlab 解释器进行通信的工作环境。同时,系统在启动时自动开辟相应的存储区域,用于存放运算的中间结果和最终结果。当退出 Matlab 系统时,存储区被释放,存储区的值将全部丢失。

在命令窗口中,输入 Matlab 命令并按回车键后,Matlab 系统便解释、运行这条命令,并在命令窗口显示运行结果。如果在命令后加分号(;),系统运行后则不显示结果。

在命令窗口输入命令适合简单的运算程序,不便于复杂程序的编辑、修改和调试。为此,Matlab 系统提供了文件功能,可以长期保存工作空间的内容。根据功能的不同,Matlab 所使用的文件分为 M 文件、MAT 文件和 MEX 文件。本节简要介绍 M 文件的编辑、运行与修改方法等。

2. 新建 M 文件

M 文件是以字母 m 为扩展名的 ASCII 码文本文件,可以使用任何文本编辑器进行编辑。Matlab 系统提供了 M 文件的专用编辑/调试器。启动编辑器的方法有两种,即

(1) 在命令窗口中输入命令

```
>>edit
```

按回车键后,Matlab 系统启动编辑器。

(2) 在命令窗口的 File 菜单中选择 New 命令,或在工具栏上选择 New File 图标。

3. 运行与修改 M 文件

Matlab 采用行命令模式,每输入一条 Matlab 命令,按回车键后系统就解释、运行这条命令,再根据要求在命令窗口显示运行结果。此外,Matlab 也可运行 M 文件中按特定顺序组合的 Matlab 语句序列。运行 M 文件的方法有两种,即

(1) 在命令窗口中输入 M 文件名并按回车键后,Matlab 系统就逐行解释并运行该 M 文件中的命令。

(2) 打开 M 文件后,在调试器的 Debug 菜单中选择 Run 命令,或在工具栏上选择 Run 图标。

运行 M 文件时若发现错误,则修改该文件,再运行。应当注意,如果 M 文件不在 Matlab 系统的搜索路径中,应当使用 path 命令在搜索路径中添加新的搜索路径。用户使用调试器运行 M 文件时,Matlab 系统自动弹出对话框,用户可以根据需要选择修改或添加新的搜索路径。

4. Matlab 常用的管理命令

Matlab 系统提供了各种管理控制命令,这里只介绍几种 Matlab 常用的管理命令。

(1) help

功能: Matlab 函数等使用方法的在线帮助。

格式:

```
>>help topic
```

说明:

直接输入 help 可列出所有主要的帮助主题。help topic 可给出 topic 指定的特定主题帮助,topic 可以是函数名、目录名或是相应的部分路径名。

(2) path

功能: 控制 Matlab 的目录搜索路径。

格式:

```
>> path('newpath')
```

说明:

直接输入 path 显示当前的 Matlab 目录搜索路径,搜索路径保存在 pathdef.m 文件中。path('newpath')可由 newpath 字符串设定路径。path(path,'newpath')和 path('newpath',path)可将由 newpath 字符串指定的路径加到当前路径之前和之后。

此外,addpath 命令在 Matlab 的搜索路径中添加目录,而 rmpath 命令从 Matlab 的搜索路径中删除目录。

(3) type

功能：列出 Matlab 文件内容。

格式：

```
>>type filename
```

说明：

在 Matlab 命令窗口显示指定 Matlab 文件的内容。文件名 filename 可包含文件的路径。

(4) clear

功能：清除当前存储区。

格式：

```
>>clear topic
```

说明：

直接输入 clear 可清除当前存储区的所有变量。clear topic 可清除存储区中 topic 指定的文件、函数或变量。clear topic1 topic2 topic3 可清除存储区中的变量 topic1、topic2 和 topic3。

(5) save

功能：将当前存储区变量保存到磁盘文件中。

格式：

```
>>save filename variables -option
```

说明：

直接输入 save 可将当前存储区的所有变量以二进制格式保存到磁盘文件 matlab.mat 中。输入 save filename 可将当前存储区的所有变量保存到指定的磁盘文件 filename 中；增加 variables 表示只保存指定的变量 variables；利用 option 参数指定文件存储格式，默认时为二进制 MAT 文件格式。可使用的格式选项有：

-ascii	8 位 ASCII 码格式；
-ascii-double	16 位 ASCII 码格式；
-ascii-tabs	8 位 ASCII 码格式，制表符分隔；
-ascii-double-tabs	16 位 ASCII 码格式，制表符分隔。

(6) load

功能：将变量从磁盘文件恢复到当前存储区。

格式：

```
>>load filename
```

说明：

直接输入 load 可恢复由 save 命令保存在磁盘文件 matlab.mat 中的变量。输入 load filename 可恢复保存在磁盘文件 filename 中的所有变量。当文件的扩展名不是 mat 时，系统自动将文件以 ASCII 码的格式处理。

(7) who, whos

功能: 列出存储区中变量的目录。

格式:

```
>>who
```

```
>>whos
```

说明:

直接输入 who 可列出当前存储区中所有变量名,而直接输入 whos 还列出变量的大小等属性。利用 who 或 whos 方便查询程序运行的中间结果,也可以从工作空间浏览器中查询。

另外,用户当前准备输入的命令与已执行过的命令相同或相似时,可以通过 ↑ 键和 ↓ 键寻出已执行过的命令,从而简化输入过程。

5. Matlab 的矩阵输入

矩阵是 Matlab 的基本操作单元,数值矩阵可以通过直接输入、函数生成、M 文件建立或外部数据文件装入等方法实现。例如

```
>>A=[1 2 3; 4 5 6]    % 通过运算符[]直接生成 2×3 矩阵,元素用逗号分开
>>B=[-1, 2; -3, 4; 5, -6] % 直接生成 3×4 矩阵,元素用逗号分开,各行之间用分号分开
>>C=ones(3, 4)        % 通过函数 ones 直接生成 3×4 矩阵
>>D=3: 0.2: 5         % 通过运算符:生成初值为 3、步长为 0.2、终值为 5 的向量
```

表 A1 给出一些常用的矩阵或向量生成和操作的函数。

表 A1 常用的矩阵生成和操作函数

	函 数 名	函 数 功 能
矩 阵 生 成	A=linspace(m, n, N)	生成初值为 m、终值为 n、长度为 N 的向量
	A=rand(m, n)	生成 m 行 n 列的 0-1 均匀分布的矩阵
	A=randn(m, n)	生成 m 行 n 列的均值为 0、方差为 1 的正态分布的矩阵
	A=zeros(m, n)	生成 m 行 n 列的全零矩阵
	A=ones(m, n)	生成 m 行 n 列的全 1 矩阵
	A=diag(x)	生成以向量 x 的值为对角元素,其他元素为零的对角矩阵;若 x 为矩阵,则生成取 x 对角元素的值的向量
矩 阵 操 作	A=eye(m)	生成 m 维的单位矩阵
	[row, col]=size(A)	row 和 col 保存矩阵 A 的行数和列数
	m=length(A)	m 保存向量 A 的长度
	B=reshape(A, m, n)	元素总数不变,改变矩阵 A 的行数和列数
	B=flipud(A)	以矩阵水平中线为对称轴,交换上下对称位置上的元素
	B=fliplr(A)	以矩阵垂直中线为对称轴,交换左右对称位置上的元素

6. Matlab 常用的数学函数

Matlab 系统提供了丰富的 Matlab 函数,用户根据不同的要求,可以方便地调用函数,大大减小编程工作量。表 A2 给出一些常用的数学函数,便于编写与调试程序时查阅。

表 A2 Matlab 的常用数学函数

函数名	数学计算功能	函数名	数学计算功能
abs (x)	实数的绝对值或复数的幅值	floor (x)	对 x 朝 $-\infty$ 方向取整
acos (x)	反余弦 $\arcsin x$	gcd (m,n)	求正整数 m 和 n 的最大公约数
acosh (x)	反双曲余弦 $\operatorname{arcosh} x$	imag (x)	求复数 x 的虚部
angle (x)	在四象限内求复数 x 的相角	lcm (m,n)	求正整数 m 和 n 的最小公倍数
asin (x)	反正弦 $\arcsin x$	log (x)	自然对数 (以 e 为底数)
asinh (x)	反双曲正弦 $\operatorname{arsinh} x$	log10 (x)	常用对数 (以 10 为底数)
atan (x)	反正切 $\arctan x$	real (x)	求复数 x 的实部
atan2 (x, y)	在四象限内求反正切	rem (m,n)	求正整数 m 和 n 的 m/n 之余数
atanh (x)	反双曲正切 $\operatorname{arctanh} x$	round (x)	对 x 四舍五入到最近的整数
ceil (x)	对 x 朝 $+\infty$ 方向取整	sign (x)	符号函数: 求出 x 的符号
conj (x)	求复数 x 的共轭复数	sin (x)	正弦 $\sin x$
cos (x)	余弦 $\cos x$	sinh (x)	反双曲正弦 $\sinh x$
cosh (x)	双曲余弦 $\cosh x$	sqrt (x)	求实数 x 的平方根
exp (x)	指数函数 e^x	tan (x)	正切 $\tan x$
fix (x)	对 x 朝零方向取整	tanh (x)	双曲正切 $\tanh x$

7. Matlab 的图形显示

Matlab 提供的图形函数有四类: 通用图形函数、二维图形函数、三维图形函数和特殊图形函数, 这里只介绍一些绘制二维图形的常用函数。

1) plot

功能: 线性二维图形。

格式:

```
>>plot (x)
>>plot (n, x)
>>plot (n, x, Linespec)
```

说明:

当 x 为实向量时, $\text{plot}(x)$ 以向量元素的下标为横坐标、元素值为纵坐标生成一条连续曲线; 当 x 为实矩阵时, $\text{plot}(x)$ 生成每列的向量对应其行下标的连续曲线, 矩阵的列数决定了曲线的条数。

当 n 和 x 都是维数相等的实向量时, $\text{plot}(n, x)$ 以 n 为横坐标、 x 的值为纵坐标生成一条连续曲线。 $\text{plot}(n, x, \text{Linespec})$ 中的参数 Linespec 用于指定线条的类型、颜色和标记符号, 表 A3 列出了几种线条的类型、颜色和标记符号。可以使用多个参数的形式, 例如

```
>>n=[5; 10; 95];
x1=[0.690, 0.826, 0.875, 0.918, 0.933, 0.937, 0.940, 0.943, 0.948, 0.951];
x2=[0.590, 0.714, 0.792, 0.819, 0.830, 0.835, 0.839, 0.840, 0.845, 0.848];
x3=[0.540, 0.664, 0.742, 0.769, 0.785, 0.790, 0.796, 0.802, 0.808, 0.812];
xa=plot(n, x1, 'marker', 'x', 'color', 'r'); hold on
xb=plot(n, x2, 'marker', 'diamond', 'color', 'b'); hold on
xc=plot(n, x3, 'k-', n, x3, 'k*'); hold off
```

表 A3 Linespec 指定的线条类型、颜色和标记

线 型		颜 色		标 记	
类型	符号	类型	符号	类型	符号
实线	-	青	c	星号	*
虚线	--	红	r	圆圈	o (字母)
点线	:	绿	g	加号	+
点划线	—.	蓝	b	叉号	x
		黑	k	正方形	square
		黄	y	三角形	^

程序运行的结果如图 A1 所示。

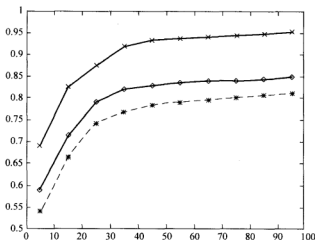


图 A1 plot 绘图程序运行结果

2) stem

功能：离散序列图。

格式：

```
>> stem(x)
>> stem(n, x)
```

说明：

函数 `stem(x)` 和 `stem(n, x)` 与 `plot(x)` 和 `plot(n, x)` 的绘图规则相同，只是 `stem` 绘制的是数字序列杆状图，可以用于绘制时域序列 $x(n)$ 及其离散傅里叶变换 $x(k)$ 的波形。函数 `stem` 也可以指定线条的类型、颜色和标记符号，例如

```
>>n=[5; 10; 95];
x=[-0.3, 0.6, -0.1, 0.8, 0.2, 0.9, -0.2, 0.75, 0.5, -0.3];
stem(n, x, 'r', 'x')
```

程序运行的结果如图 A2 所示。

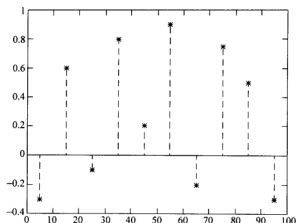


图 A2 stem 绘图程序运行结果

3) subplot

功能：建立和控制多个坐标系。

格式：

```
>>subplot(m,n,k)
```

说明：

函数 subplot 将当前的图形窗口分割成 $m \times n$ 个窗格，并将第 k 个窗格设置为当前图形窗格，随后的绘图函数在该窗格定义坐标系统和输出图形。

4) figure

功能：创建新的图形窗口。

格式：

```
>>figure
```

说明：

函数 figure 创建一个新的图形窗口，并成为当前图形窗口，所创建的图形窗口的序号（句柄值）是同一 Matlab 程序中创建的顺序号。

可以用 $h = \text{figure}$ 将创建的图形窗口的句柄值赋给变量 h 。在程序设计中，使用 $\text{figure}(h)$ 可以使句柄值为 h 的图形窗口成为当前图形窗口，用于控制将各种图形输出到相应的图形窗口中。

5) hold

功能：在图形窗口中保持当前图形。

格式：

```
>>hold on
```

```
>>hold off
```

说明：

函数 hold 决定将要绘制的图形是添加到图形上，还是取代已绘制的图形。hold on 保持当前的图形，实现多条曲线的绘制；hold off 关闭保持特性，每次绘图时自动清除已绘制的图形。

附录 B

数字信号处理中常用的 Matlab 函数

表 B1 数字信号处理中常用的 Matlab 函数一览表

分 类	函 数 名	功 能 说 明
滤波器分析	abs	实数的绝对值或复数的幅值
	angle	复数的相角
	freqs	模拟系统的频率响应
	freqspace	为频率响应设定频率间隔
	freqz	数字滤波器的频率响应
	freqzplot	频率响应绘制
	fvtool	滤波器可视化工具
	grpdelay	群延迟
	impz	$H(z)$ 的单位脉冲响应 $h(n)$
	unwrap	修正相位,使其范围不限于主角 $\pm \pi$
	zplane	计算并画出离散的零、极点
滤波器实现	conv	线性卷积
	conv2	二位卷积
	deconv	解卷积
	fftfilt	重叠相加滤波器实现
	filter	滤波器实现
	filter2	二维滤波器实现
	filtfilt	零相位滤波
	filtic	确定滤波器原始条件
	latcfilt	格形滤波器实现
	medfilt1	一维的中值滤波
	sgolayfilt	Savitzky Golay 滤波器实现
	sosfilt	二阶环节 (biquad) 滤波实现
	upfirdn	先高取样,后 FIR 滤波,再低取样
FIR 滤波器设计	convmtx	卷积矩阵
	cremez	复非线性相位等波动 FIR 滤波器设计
	fir1	基于窗函数 FIR 滤波器设计
	fir2	基于窗函数的任意响应 FIR 滤波器设计
	fircls	约束的最小二乘法任意响应滤波器设计
	fircls1	约束最小二乘法低通和高通滤波器设计

续表

分 类	函 数 名	功 能 说 明
FIR 滤波器设计	firls	最小二乘法 FIR 滤波器设计
	firrcos	上升余弦 FIR 滤波器设计
	intfilt	插值 FIR 滤波器设计
	kaiserord	基于窗函数的 Kaiser 滤波器阶数选择
	remez	Parks McClellan 最优的 FIR 滤波器设计
	remezord	Parks McClellan 滤波器阶数设计
	sgolay	Savitzky Golay FIR 平滑滤波器设计
IIR 数字滤波器	butter	巴特沃斯滤波器设计
	cheby1	切比雪夫-I 型滤波器设计
	cheby2	切比雪夫-II 型滤波器设计
	ellip	椭圆型滤波器设计
	maxflat	归一化的巴特沃斯低通滤波器设计
	yulewalk	耶鲁-沃克滤波器设计
IIR 滤波器阶数估算	buttord	巴特沃斯滤波器阶数选择
	cheblord	切比雪夫-I 型滤波器阶数选择
	cheb2ord	切比雪夫-II 型滤波器阶数选择
	ellipord	椭圆型滤波器阶数选择
模拟低通滤波器原型	besselap	贝塞尔滤波器原型
	buttapp	巴特沃斯滤波器原型
	cheblap	切比雪夫类型-I 型滤波器原型(带通波动)
	cheb2ap	切比雪夫类型-II 型滤波器原型(带阻波动)
模拟低通滤波器设计	ellipap	椭圆型滤波器原型
	besself	贝塞尔模拟滤波器设计
	butter	巴特沃斯滤波器设计
	cheby1	切比雪夫类型-I 型滤波器设计
	cheby2	切比雪夫类型-II 型滤波器设计
模拟滤波器频带变换	ellip	椭圆型滤波器设计
	lp2bp	低通向带通模拟滤波器交换
	lp2bs	低通向带阻模拟滤波器交换
	lp2hp	低通向高通模拟滤波器交换
	lp2lp	低通向低通模拟滤波器交换
滤波器离散化	bilinear	有预先修正选项的双线性变换
	impinvar	脉冲响应不变法模拟向数字转换
	latc2tf	梯形或者梯形梯形向传递函数转换
	polystab	使多项式稳定
线性系统变换	polyscale	多项式根乘以倍率
	residuez	Z 变换部分分式展开
	sos2ss	级联二阶环节向状态空间转换
	sos2tf	级联二阶环节向传递函数转换
	sos2zp	级联二阶环节向零极点增益转换
	ss2sos	状态空间转换为二阶环节级联
	ss2tf	状态空间向传递函数转换

续表

分 类	函 数 名	功 能 说 明
线性系统变换	ss2zp	状态空间向零极增益转换
	tf2latc	传递函数向格形或者格形梯形转换
	tf2sos	传递函数向级联二级环节转换
	tf2ss	传递函数向状态空间转换
	tf2zp	传递函数向零极增益转换
	zp2sos	零极增益向级联二阶环节转换
	zp2ss	零极增益向状态空间转换
	zp2tf	零极增益向传递函数转换
窗函数	bartlett	Bartlett 窗函数
	barthannwin	修正巴特利特-汉宁窗
	blackman	布莱克曼窗函数
	blackmanharris	最小四项 Blackman-Harris 窗函数
	bohmanwin	Bohman 窗函数
	chebwin	切比雪夫窗函数
	gausswin	高斯窗函数
	hamming	哈明窗函数
	hann	汉宁窗函数
	kaiser	凯泽窗函数
	nuttallwin	Nuttall 最小四项 Blackman-Harris 窗函数
	rectwin	矩形窗函数
	triang	三角窗函数
	tukeywin	Tukey 窗函数
	window	窗函数引入
变换	bitrevorder	将输入交换成倒序排列
	czt	线性调频 Z 变换
	dct	离散的余弦变换
	dftmtx	离散傅里叶变换矩阵
	fft	快速傅里叶变换
	fft2	二维快速傅里叶变换
	fftshift	交换矢量的一半
	goertzel	计算 DFT 的 goertzel 算法
	hilbert	Hilbert 变换
	idct	离散的逆余弦变换
	ifft	快速傅里叶逆变换
	ifft2	二维快速傅里叶逆变换
倒谱分析	cceps	复倒谱
	lccpeps	逆复倒谱
	rcpeps	实倒谱和最小相位重建
统计信号处理和谱分析	cohere	相干函数
	corrcoef	相关函数
	corrmtx	自相关函数
	cov	协方差函数
	csd	互相关谱密度

续表

分 类	函 数 名	功 能 说 明
统计信号处理和谱分析	pburg	用 Burg 方法功率谱估计
	pcov	用协方差方法功率谱估计
	peig	用特征向量方法功率谱估计
	periodogram	周期谱图方法功率谱估计
	pmcov	用修改协方差方法的功率谱估计
	pmtm	用 Thomson 多带方法功率谱估计
	pmusic	用 MUSIC 方法的功率谱估计
	psdplot	绘制功率谱密度数据
	pwelch	用 Welch 的方法功率谱估计
	pyulear	用耶鲁-沃克 AR 方法的功率谱估计
	rooteig	用特征向量法作正弦频率功率谱估计
	rootmusic	用 MUSIC 法作正弦频率功率谱估计
	tfe	传递函数估计
	xcorr	互相关函数
	xcorr2	二维互相关
	xcov	协方差函数
参数建模	arburg	用 Burg 的方法 AR 参数的建模
	arcov	用协方差方法 AR 参数的建模
	armcov	用修改协方差的方法 AR 参数的建模
	aryule	用耶鲁-沃克方法 AR 参数的建模
	ident	参看系统辨识工具箱
	invfreqs	模拟滤波器向频率响应拟合
	invfreqz	离散的滤波器向频率响应拟合
	prony	Prony 离散滤波器拟合时间响应
	stmcb	Steiglitz McBride 迭代的 ARMA 建模
	decimate	用低取样速度再取样
多取样率信号	downsample	抽取输入信号
	interp	通用一维插值透入(MATLAB 实现箱)
	interp1	用新取样速度再取样
	resample	用更高取样速度再取样
	spline	三次样条内插
	upfirdn	先内插,后 FIR 滤波,再抽取
	upsample	对输入信号内插
波形产生	chirp	扫频的频率余弦发生器
	diric	Dirichlet(周期性 sinc)函数
	gauspuls	高斯高频脉冲发生器
	gmonopuls	高斯单脉冲发生器
	pulstran	脉冲序列发生器
	rectpuls	取样的非周期性的方波发生器
	sawtooth	锯齿函数
	sinc	Sinc 或者 $\sin(\pi * x)/\pi * x$ 函数
	square	方波函数
	tripuls	取样的非周期性的三角波形发生器
	vco	压控振荡器